(39). RECENSIONE: E. SCHRÖDER, VORLESUNGEN ÜBER DIE ALGEBRA DER LOGIK

(Rivista di matematica, vol. I, 1891, pp. 164-170)

Questa recensione mette in rilievo alcune concordanze ed alcune differenze fra l'opera recensita ed il lavoro n. 35 (del 1891); tema, questo, che è ripreso ed approfondito nel lavoro n. 102 (del 1898).

Essa contiene inoltre, in nota, uno studio sulla validità di una formula che generalizza la legge distributiva del prodotto logico rispetto alla somma logica. Tale questione è collegata alla teoria svolta nel precedente lavoro n. 35 (del 1891). *U. C.*

Dr ERNST SCHRÖDER. — *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exacte Logik*), I Bd. Leipzig, Teubner, 1890.
— II Bd. Erste Abtheilung, 1891.

Il primo volume della vasta opera intrapresa dallo Schröder contiene 718 pagine. E si può prevedere che, colla prossima comparsa del secondo volume, si avrà un'opera che conterrà quanto si è detto e fatto finora su questo nuovo ramo di scienza, fondato dal Boole, e che ora va rapidamente svolgendosi. La grande cura usata dall'A., la sua profonda erudizione, la completissima bibliografia che accompagna il lavoro, fanno sperare che quest'opera colossale sarà il vasto repertorio che dovrà compulsare chiunque intenda fare nuovi studii in questo campo.

Però non vorrei che la mole del libro spaventasse il lettore, e che questi ne deducesse una difficoltà nello studio della logica matematica. Le più importanti leggi, quelle riconosciute utili alla pratica, si possono apprendere in breve tempo, e con minor fatica, di quella che esiga la lettura d'un comune trattato di logica. Il libro dello Schröder contiene moltissime discussioni, spesso di pura filosofia, che può benissimo tralasciare chi intenda servirsi a solo scopo pratico di questo nuovo strumento.

L'A. invero destina il suo libro a due specie di lettori oggidì troppo diversamente predisposti, ai matematici cioè e ai filosofi. Ed avendo anche l'intenzione di pubblicare un libro intelligibile a chiunque abbia retto intendimento, senza presupporre cognizioni precedenti, dovette minuziosamente spiegare molti punti, a cui i matematici sono assuefatti.

Non seguirò l'A. nella parte filosofica, essendone io incompetente. Riguardo alla parte matematica, già implicitamente ne feci una recensione negli articoli precedenti sulla logica matematica, nei quali mi sono appunto ampliamente servito del lavoro dello Schröder. Tutte le formule contenute nelle prime 8 lezioni dello Schröder trovansi in sostanza riportate nei §§ 1-4 della mia ultima nota (*). Però c'è differenza nell'ordine con cui si presentano queste formule nello Schröder, e nella mia raccolta, e non c'è nemmeno corrispondenza fra gli assiomi o principii, le definizioni e i teoremi, poichè si partì da punti di vista differenti; invero, in questo primo volume l'A. si occupa solamente del calcolo sulle classi (*Gebietekalkul*), riservando al secondo volume il calcolo sulle proposizioni (*Aussagenkalkul*) (il quale è invece l'oggetto della mia nota).

L'introduzione (di 125 pagine) costituisce da sè un libro. In essa l'A. espone lo scopo della logica deduttiva, la natura del pensiero, delle idee, dei nomi, ecc., ossia tutto quel materiale che trovasi nei trattati ordinarii di logica. Solo dopo questa introduzione l'A. entra *in medias res*, cioè nell'Algebra della Logica, che differisce così notevolmente e nella forma e nella sostanza dalla logica esposta negli ordinarii trattati, e che appartiene alla matematica, e più precisamente alla teoria delle operazioni.

Nella prima lezione l'A. spiega il concetto di subordinato e sovraordinato. Per indicare che « la classe a è contenuta nella classe b » scrive « $a \leq b$ », o meglio adotta un segno derivato dal $\leq$; e fa vedere, d'accordo col Peirce, che questa è la più semplice relazione che si possa immaginare. (Per evitare difficoltà tipografiche, io indicai la stessa relazione con $a \supset b$). Invece il Boole riteneva come fondamentale il concetto di eguaglianza. Con numerosi esempi l'A. discute e chiarisce questi concetti.

Spiega gli equivoci cui può dar luogo lo scrivere, come alcuni fanno, $a = b$ per indicare « ogni a è b ». Così secondo questa notazione, si avrebbe *argento* = *metallo*, *oro* = *metallo*, onde ci sarebbe

(*) Il lavoro n. 35 (del 1891). *U. C.*

pericolo di dedurre la eguaglianza dei primi membri (1). Analogamente vi sarebbero a temere equivoci adottando per lo stesso scopo i segni ordinarii di maggiore e minore.

Nella seconda lezione enuncia due principii, quello di identità (Formule di logica § 1 P1) e il sillogismo (id. § 1 P8); definisce l'eguaglianza (id. § 2 P1), e ne dimostra le proprietà (id. § 2, prop. 2, 12, 11, 13). In seguito introduce i moduli dell'addizione e moltiplicazione logica, cioè le classi *nulla* e *tutto*, che egli indica con 0 e 1, e che definisce mediante la proprietà, che, qualunque sia a, si abbia $0 \supset a \supset 1$.

Si noti però che l'uso di queste cifre in questo significato particolare può dar luogo ad equivoci. Così la scrittura:

(Radice d'una data equazione) = 0

si può interpretare in due modi, secondochè il segno 0 si legge *zero* o *nulla*; nel primo caso essa significa

« Quell'equazione ha la sola radice zero »

nel secondo:

« Quell'equazione non ha radici ».

Questo pericolo è notato dall'A. a pag. 193, ma non parmi che il rimedio indicato sia sufficiente. Quindi parmi miglior consiglio usare d'accordo col Peirce, il segno v (iniziale di vero) come modulo della moltiplicazione, e lo stesso segno rovesciato (ʌ) come quello dell'addizione, il quale ultimo poi solo ha importanza pratica.

Le lezioni terza, quarta e quinta si riferiscono alla moltiplicazione e addizione logica (congiunzione e disgiunzione), e allo studio delle loro proprietà.

La sesta lezione è specialmente dedicata all'esame della proposizione $(a \cup b)c \supset ac \cup bc$ (che è la prop. 21 del § 3 della mia raccolta), e che l'A. fa vedere non essere conseguenza delle precedenti, ma doversi ammettere, almeno in parte, come un nuovo principio (o proposizione primitiva) (2).

(1) Anche in molti trattati di aritmetica si scrive impropriamente p. e. « a = multiplo di b » per dire « a è un multiplo di b » cioè « $a \, \varepsilon \, b \times \mathrm{N}$ ».

(2) È questo un notevolissimo risultato dovuto allo Schröder. (*) Questa questione si può enunciare nel modo seguente:

(*) La proposizione in discorso si presenta come primitiva nella teoria di E. Schröder ma non nella teoria sviluppata da G. Peano nel lavoro n. 35 (del 1891), come è stato già osservato in una postilla a detto lavoro. *U. C.*

Le lezioni settima e ottava si riferiscono alla negazione.

La nona contiene una lunga serie di applicazioni.

Dapprima fa vedere gli inconvenienti cui si va incontro quando per somma di due classi a e b si intenda l'insieme di due individui che sono o a o b, *contando due volte quelli che appartengono ad ambe le categorie.* Poi si ferma sulla mancanza di precisione e sui pericoli di equivoci che derivano, nel linguaggio ordinario, dalle congiunzioni *e*, *o*, *non*, e come esse si debbano nei varii casi tradurre in simboli. Tratta in seguito del modo di trasformare e semplificare, in virtù

Si consideri un sistema di enti S; suppongasi definita una relazione fra due enti a e b, che indicheremo con $a \supset^* b$. (Il segno $\supset^*$ indica una relazione qualunque; per indicare la deduzione conserveremo il segno $\supset$). Supponiamo che essa sia *riflessiva* e *transitiva* (vedasi la nota del dott. Vailati, in questa Rivista, pag. 134), cioè si abbia

$$a \supset^* a$$

$$a \supset^* b \,.\, b \supset^* c : \supset . \, a \supset^* c \,.$$

Suppongasi poi che dati due enti a e b del sistema, risulti determinato un ente $a \cap^* b$ tale che si abbia qualunque sia c:

$$c \supset^* a \cap^* b \,. = : c \supset^* a \,.\, c \supset^* b$$

ed un altro ente $a \cup^* b$ tale che

$$a \cup^* b \supset^* c \,. = : a \supset^* c \,.\, b \supset^* c \,.$$

In conseguenza per questi enti saranno vere tutte le formule contenute nelle lezioni 1ª - 5ª dell'A. (e quindi p. e. tutte quelle della menzionata nota del Vailati). Si domanda se di necessità sarà anche vera la relazione

$$(a \cup^* b) \cap^* c \supset^* (a \cap^* c) \cup^* (b \cap^* c)$$

(poichè la relazione inversa, corrispondente a §3 P20, si può agevolmente dimostrare).

In più modi si possono interpretare i segni $\supset^*$, $\cup^*$, $\cap^*$ in guisa da verificare alle condizioni precedenti. Così:

si consideri il sistema dei numeri reali, e

con $a \supset^* b$ si intenda la relazione $a \geq b$,
con $a \cap^* b$ » il massimo dei due numeri a e b,
con $a \cup^* b$ » il minimo di essi.

Oppure:

si consideri il sistema dei numeri interi e positivi, e

con $a \supset^* b$ si intenda « a è multiplo di b »,
con $a \cap^* b$ » il minimo comune multiplo di a e b,
con $a \cup^* b$ » il massimo comun divisore di a e b.

Sempre saranno verificate le condizioni precedenti e quindi sono vere tutte le formule suddette, ove loro si dia l'interpretazione indicata.

Questa osservazione dimostra maggiormente l'importanza dello studio delle formule di logica, potendosi esse applicare non solo alla logica pura, ma anche

delle formule di logica, alcune proposizioni del linguaggio ordinario. P. es. la proposizione « i sali incolori sono sali inorganici, ovvero sono corpi inorganici incolori » è una identità logica, ovvero una proposizione di chimica?

Sono a notarsi (pag. 380) le proprietà della classe $a - b \cup b - a$ ch'egli indica con $a \circ b$ (V. Formule di logica, § 4 P24 e segg. nelle aggiunte).

in altre ricerche. Così il principio di dualità in logica, interpretato nell'ultimo modo, si enuncia così:

« Se in una proposizione qualunque che riguarda i multipli, i divisori, il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo di più numeri, si scambia il primo col secondo termine, e il terzo col quarto, si avrà una nuova verità ».

In questi due esempi è verificata completamente la proprietà distributiva in questione. Per far vedere che questa proprietà non è conseguenza delle enunciate, basta recare un esempio d'una interpretazione tale da darsi ai segni $\supset^*$, $\cap^*$, $\cup^*$, in modo che, essendo verificate le condizioni imposte, non sia verificata la proprietà distributiva. L'A. porta appunto nelle appendici 5 e 6, due di tali esempi, appartenenti al dominio della logica. Credo non inutile l'aggiungerne altri due, presi da differenti parti delle matematiche.

1º Si considerino le *sostituzioni* di n lettere, e siano a, b, ... dei *gruppi* di sostituzioni (JORDAN, *Substitutions*), ovvero *sistemi di sostituzioni coniugate* (SERRET, *Algèbre*). Si indichi con $a \supset^* b$ la relazione « il gruppo a è contenuto nel gruppo b ».

Con $a \cap^* b$ si indichi il massimo gruppo contenuto in a e in b (che è appunto il sistema di sostituzioni comuni ai due gruppi a e b, poichè questo sistema è appunto un gruppo).

Con $a \cup^* b$ si indichi il minimo gruppo contenente a e b (che contiene tutte le sostituzioni di a e di b, ed altre ancora, loro prodotti).

Allora non è sempre vero che sia $(a \cup^* b) \cap^* c \supset^* (a \cap^* c) \cup^* (b \cap^* c)$. (Per assicurarsene, basta considerare i gruppi di sostituzioni di 3 oggetti).

2º Si considerino delle figure piane *convesse*, cioè delle figure piane, tali che se due punti appartengono ad essa, tutto il segmento che li unisce appartiene pure alla figura. Essendo a, b, ... figure siffatte, con

$a \supset^* b$ si indichi « la a è contenuta nella b »,
$a \cap^* b$ » « la massima figura convessa contenuta in a e in b »

(che è appunto la figura comune a a e a b, essendo questa convessa) e con $a \cup^* b$ si indichi « la minima figura convessa contenente a e b » (che contiene i punti di a e di b, ed altri punti).

Nemmeno in questo caso è vera la proprietà distributiva. Per es. se a e b sono due cerchi esterni l'uno all'altro, allora $a \cup^* b$ indica una figura limitata da due archi di quelle circonferenze e dalle loro tangenti esterne. Si prenda per c un cerchio contenuto in $a \cup^* b$, ma avente nessun punto a comune nè con a, nè con b. Allora si avrà $(a \cup^* b) \cap^* c = c$; mentrechè $(a \cap^* c) \cup^* (b \cap^* c)$ è nullo.

La lezione successiva si riferisce alle funzioni d'una o più classi variabili, ottenute eseguendo su esse e su classi fisse più volte le operazioni studiate. Il teorema principale, dovuto a Boole, è:

Ogni funzione $f(x)$ d'una classe x si può ridurre alla forma

$$f(x) = ax \cup b\,(-x),$$

ove a e b sono i valori di $f(x)$, quando al posto di x si metta rispettivamente la classe *tutto* e la classe *nulla*, cioè $a = f(\mathrm{V})$ e $b = f(\Lambda)$ (vedasi la pag. 10 di questa Rivista).

Nella lezione undecima sono spiegati i metodi per risolvere ogni equazione logica o sistema di equazioni siffatte. La dodicesima tratta delle operazioni inverse dell'addizione e moltiplicazione logica. Le lezioni tredicesima e quattordicesima infine contengono moltissimi esercizii, e nuovi metodi per risolvere problemi particolari.

Una recensione, dal punto di vista matematico, di quest'opera, fu pubblicata da D. Z. C. de Galdeano, *El progreso matemático*, 1891, pag. 139.

Un'altra recensione, dal punto di vista filosofico, fu pubblicata da H. C. Husserl, *Göttingische gel. Anzeigen*, 1891, pag. 243, e in questa il recensionista va poco d'accordo coll'autore.

Recentemente è uscita la prima parte del secondo volume di questa opera; e l'A. (lez. 15) entra nel calcolo sulle proposizioni (*Aussagenkalkul*).

Essendo a una proposizione contenente una lettera x, allora, seguendo il Peirce, scrive $\Sigma_x a$ per indicare « la proposizione a è vera per qualche x », ossia « esiste almeno un x, per cui è vera la a », e scrive

$\Pi_x a$ per dire « qualunque sia la x, è vera la a ».

Però questi segni non sono punto necessarii. Invero la prima proposizione, che è la negazione della $a = \Lambda$, si può scrivere $a - = \Lambda$, avendo cura di mettere al segno $=$ l'indice x, ove sia necessario per la chiarezza. La seconda proposizione poi non si presenta mai sotto la forma indicata « qualunque sia x, è vera la a », ma bensì sotto quell'altra « qualunque si sia la x, purchè d'una certa classe s, è vera la a », che si indica con $x \varepsilon s . \supset . a$ (mettendo al segno $\supset$ l'indice x, ove sia necessario). Così si scriverà:

$$x \varepsilon \mathrm{q} . \supset . (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

ovvero $$x \varepsilon \mathrm{q} . (x+1)^2 - = x^2 + 2x + 1 : = \Lambda.$$

Solo quando si sappia a priori quali enti rappresentano le lettere introdotte, come avviene nel caso attuale in cui le lettere rappresentano sempre classi, quella indicazione si può sottintendere.

Coi segni introdotti l'A. esprime in formule il centinaio di proposizioni contenute nel 1^0 volume.

In seguito fa vedere come nelle formule così scritte non sussista più completamente la legge di dualità.

Nella lezione 16ª l'A. tratta delle proposizioni fondamentali della logica nel calcolo delle proposizioni, e siccome a questo punto c'è molta relazione fra il lavoro dell'A. e le mie formule di logica, sarà bene arrestarci un momento.

Il principio dell'identità, che è la formula §1 P1 della mia raccolta, cioè $a \supset a$, significa « se a è vera, essa è vera ». In conseguenza questo principio, che i logici chiamano fondamentale, non può essere di alcun aiuto in un ragionamento, poichè permette solo di *ripetere* tale e quale una proposizione già enunciata. E invero, nella mia raccolta, mai ebbi a citare siffatto principio (salvo per ottenere l'altra proposizione dello stesso valore $a = a$). L'A. invece attribuisce a questo principio un significato più ampio, cioè che « una proposizione riconosciuta vera, si possa *in ogni occasione* ripetere », e quindi implicitamente fa contenere in questo principio le proposizioni primitive 2, 3, 4, 5 e 12 del mio §1. A mio avviso invece, queste proposizioni che permettono non solo di ripetere inalterato un complesso di proposizioni, ma bensì di fare in questo complesso qualche leggiero cambiamento, non sono contenute nella prop. 1, ma debbono essere esplicitamente enunciate.

L'affermazione simultanea di due proposizioni (pag. 53), è nel calcolo sulle proposizioni, un' idea primitiva (*Urbegriff*); con essa si può definire il prodotto di due classi. L'A. osserva che la prop. $a \supset b c . = : a \supset b . a \supset c$ (*Formule*, §2 P18), che, per le classi aveva assunto come definizione del prodotto, per le proposizioni si debba ritenere come un teorema, o come un principio. Nella mia raccolta esso figura come un teorema. L'A. a questo punto aggiunge : « Io sono effettivamente in dubbio, se in questi casi limiti esista ancora una rigorosa differenza fra le idee di definizione, assioma o principio, e teorema ».

Nella lezione 17ª l'A. tratta dei giudizi e delle relazioni fra due classi. È a notarsi un sistema di notazioni relativamente semplici e simmetriche che permettono di esprimere queste relazioni ; però, siccome esse esigono dei segni tipografici speciali, difficilmente entreranno nel dominio pubblico ; d'altra parte esse non sono necessarie.

Nella lezione successiva si riducono tutte le relazioni fra classi

ad eguaglianze o a ineguaglianze, e si studiano le relazioni che possono sussistere fra due o più classi.

Nella 19ª lezione si tratta della risoluzione di sistemi di eguaglianze e di ineguaglianze, e della eliminazione di classi incognite in tali sistemi.

Nella 20ª lezione si discute il sillogismo, che è l'eliminazione del termine medio fra le due premesse, e si esaminano quali delle forme usuali sono vere e quali incomplete.

La lezione 21ª contiene acute discussioni su delicate differenze fra il calcolo sulle proposizioni e quello sulle classi. In seguito si risolvono parecchi problemi, che conducono alle questioni trattate nella lezione 19ª. Eccone uno come esempio (MITCHELL):

« Si sa che alcuni a, che sono degli x, non sono degli y; ovvero che ogni d è ad un tempo x e y. Contemporaneamente si sa che alcuni y sono b ed x; ovvero che gli x sono o dei non y, o sono c e non b. Cosa si può conchiudere delle classi a, b, c, d? » Eliminando le x e y colle regole precedenti, si ottiene:

« Ne avverrà che, o nessun d è b, e tutti i d sono c, ovvero esistono degli a, o esistono dei b ».

La lezione 22ª riguarda gli individui (punti); e io non intendo ora di fermarmi su questo argomento. Alla fine l'A. dà la definizione del numero (*Anzahl*) degli individui contenuti in una classe.

La lezione 23ª contiene studii ulteriori sui sillogismi e sulla risoluzione di eguaglianze e diseguaglianze fra classi.

Conchiudo questa recensione coll'ammirare l'opera magistrale dell'A. in cui è contenuto tutto quanto si riferisce, al giorno d'oggi, a questo nuovo ramo scientifico. L'Algebra della Logica è ora in via di formazione; quindi l'accurato Autore dovette discutere tutti i tentativi fatti, e riesporre molte teorie di diversi autori, che non hanno applicazione immediata. Solo l'applicazione continuata, e su vasta scala, di questa scienza, i cui principii, ripeto, sono assai semplici, ci porrà in grado di riconoscere quali fra le innumerevoli formule sono utili e quali meno; quali teorie si dissecheranno spontaneamente perchè sterili; quali notazioni, sia in riguardo alla sostanza che alla forma, sono a preferirsi; e così ottenere un corpo di dottrina semplice ed utile nella pratica. Io credo che a questo risultato si arriverà specialmente colle applicazioni alla matematica, ove le idee sono completamente precisate; invece applicandole, secondo l'antica usanza dei logici, ad esempi tratti dal linguaggio comune, in cui i termini sono sempre alquanto imprecisi, e quindi non atti a passare più volte nel meccanismo delle formule, si arriva qualche volta a risultati assurdi o troppo semplici, e quindi poco utili ad illustrare la teoria.

(65). UN PRECURSORE DELLA LOGICA MATEMATICA

(Rivista di matematica, vol. IV, 1894, p. 120)

Nel II vol. delle *Miscellanea Taurinensia* (1) pubblicato nell'anno 1761, (parte 3ª, pag. 46-63) trovasi un lavoro di Ludovico Richeri, col titolo: *Algebrae philosophicae in usum artis inveniendi, specimen primum.*

L'A. tenta risolvere il celebre problema di Leibniz; perciò indica con segni speciali i varii enti che compaiono in logica e metafisica; cioè il possibile e l'impossibile, il tutto e il nulla, il determinato e l'indeterminato, il sì e il no, il necessario e il continngente... È a notarsi che i segni pel *tutto* e *nulla* sono rispettivamente U e ∩, e di ben poco diversificano da quelli del formulario di Matematica.

Le idee dell'A. sono profonde, ed egli spera ottenere notevoli risultati; dice a pag. 59:

«... Combinationes principaliores speciminis ergo indicamus; cœteras iisdem insistens principiis quisque inveniet, et non sine voluptate simplicissimam fœcunditatem experietur, quemadmodum ex secundo specimine constabit, ubi, Deo dante, algebræ philosophicæ theoriam omnem, et ejus applicationes tentabimus, et tum demum de arte inveniendi universalissima judicium erit».

Ma questa seconda parte non è comparsa. E in questa prima l'A. non seppe ancora liberarsi dalla metafisica; questo lavoro si deve considerare come un semplice tentativo. Le sole proposizioni appartenenti al formulario di Matematica che trovansi nella memoria dell'A. sono

$$a \cap -a = \Lambda, \quad a \cup -a = \mathrm{V}.$$

(1) Come è noto, esso è il titolo della pubblicazione periodica fondata da Lagrange, Cigna, ..., che assunse più tardi il nome di «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino».

(82). RECENSIONE: G. FREGE, GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK, BEGRIFFSSCHRIFTLICH ABGELEITET

(Rivista di matematica, vol. V, 1895, pp. 122-128)

In questa recensione, l'autore, dopo un accenno allo scopo della logica matematica ed al proprio contributo allo sviluppo di questa scienza, fa il confronto — sia sotto l'aspetto scientifico che pratico — tra l'ideografia di FREGE e la propria.

La recensione ha dato luogo ad uno scambio di lettere fra G. FREGE e G. PEANO, pubblicate nel presente volume. Cfr., in proposito, il lavoro n. 97 (del 1898). *U. C.*

Dr G. FREGE. — *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Erster Band, Jena, 1893, pag. XXXII+254.

In questo libro si dimostrano le proposizioni fondamentali dell'Aritmetica, cioè quelle riferentisi al concetto di numero intero, alla numerazione, all'infinito, ecc. Non sono considerati nel volume i numeri negativi, nè i fratti; nè ancora è trattata l'addizione degli interi.

Ma ciò che rende importante questo libro è la forma data a queste dimostrazioni, forma che l'A. chiama *ideografia* (Begriffsschrift), e che consiste nell'indicare con segni aventi valore fisso le varie idee che si presentano nella sua trattazione; nello spiegarne alcune con parole del linguaggio ordinario, e nel definire le altre combinando puramente le idee precedenti. Le dimostrazioni delle proposizioni d'Aritmetica sono tutte scritte nella sua ideografia, senza termini del linguaggio ordinario; esse si riducono ad una successione di proposizioni, tali che dall'una si passa all'altra applicando una sola regola di ragionamento; e queste regole sono dall'Autore raccolte ed esaminate in apposito §.

L'A. nel costrurre questo lavoro adopera un metodo affatto suo proprio. Egli già aveva trattate le questioni di Aritmetica col linguaggio comune nei « Grundlage der Arithmetik (1884) »; ed aveva già esposto il suo « Begriffsschrift » nel 1879; il quale però non corrisponde più appieno all'attuale suo punto di vista (pag. 5, nota).

È evidente l'identità della questione trattata dal nostro autore con quella che è scopo della Logica matematica. Non è mia intenzione di fare qui la storia di questa scienza, che si va ora rapidamente sviluppando. Questa storia è scritta nel Formulario di Matematica, parte I, in quanto si riferisce alle varie identità logiche, poichè ivi è indicato l'Autore che primo le enunciò.

Or sono alcuni anni, colla considerazione della classe determinata da una condizione, vale a dire mettendo degli indici al segno di deduzione, feci vedere che tutto il calcolo logico sulle classi si trasformava in un calcolo sulle proposizioni (*Calcolo geometrico*, 1888); idea questa già intravvista dal BOOLE, il quale parlò di *tempo*, durante cui una condizione è verificata.

E allora bastò una convenzione onde indicare le proposizioni individuali (segno ε), perchè potessi sviluppare un'intera teoria completamente in simboli, negli « *Arithmetices principia* (1889) ».

Questa scrittura simbolica si è poi successivamente perfezionata; finchè nel Formulario di Matematica già si riuscì ad analizzare in simboli numerose teorie. Man mano si traducono in simboli nuove teorie, conviene introdurre nuovi segni per indicare le nuove idee o le nuove combinazioni di idee che si presentano in queste teorie. Però si noti che non occorrono nuovi segni per indicare le idee di logica. Esse sono tutte completamente rappresentate coi segni dapprima introdotti. La Matematica è ora in possesso d'uno strumento atto a rappresentare tutte le sue proposizioni, e ad analizzare le varie forme di ragionamento.

Ora se, indipendentemente l'uno dall'altro, sorgono due sistemi atti a rappresentare e ad analizzare le proposizioni d'una teoria, fra essi si potrà presentare una assoluta differenza formale; ma vi dovrà sussistere un'analogia sostanziale; e se i sistemi sono egualmente perfezionati, fra essi ci dovrà essere l'identità. Poichè la Logica Matematica non consta di una serie di convenzioni arbitrarie, e variabili a capriccio dell'autore; ma bensì nell'analisi delle idee e delle proposizioni in primitive e derivate. E questa analisi è unica.

Molte idee del nostro Autore sono analoghe a quelle esposte nella Logica matematica. Le definizioni e le dimostrazioni sono quasi

identicamente considerate, e in modo affatto diverso da quello dei logici che non fanno uso dei simboli.

Io mi propongo qui di dare un cenno del modo usato dall'A. per indicare le operazioni e relazioni logiche.

È noto che, nel Formulario di Matematica, tutte le relazioni ed operazioni fra proposizioni e fra classi si riducono a tre fondamentali, indicate coi segni

$$\cap\,,\quad \supset\,,\quad -\,.$$

Oltre a questi si usano, per comodità, i segni $=$, $\cup$, Λ, che sono definiti mediante i precedenti.

Il FREGE, per esprimere queste relazioni e operazioni fra proposizioni, scrive in colonna queste proposizioni, e a sinistra, lungo questa colonna, mette un segno vario composto di tratti orizzontali, verticali, curvi, tutti aderenti fra loro; sicchè si ha qualche difficoltà a decomporre questo segno nei segni che lo costituiscono, onde poterli numerare. Ad ogni modo ecco come si possa spiegare la notazione del FREGE.

Essendo a una proposizione, il nostro Autore (pag. 9) introduce una notazione $\vdash a$ per dire «la a è vera»; ed un'altra notazione $-a$ per indicare «la verità di a». Non veggo l'utilità di queste convenzioni, che non hanno le corrispondenti nel Formulario. Invero la varia posizione che può avere in una formola una proposizione indica completamente ciò che di essa si afferma. Così delle nostre scritture

$$a\,,\qquad a \supset b\,,\qquad a \supset b\,.\supset c$$

la prima dice «è vera la a», la seconda invece «da a si deduce b», la terza «se da a si deduce la b, allora è vera la c». Quest'ultima non indica la verità di a, b, c nè di $a \supset b$, ma solo la verità della relazione indicata fra queste proposizioni.

In seguito l'A. introduce un segno $\top$ per la negazione, che corrisponde al nostro $-$. Il segno d'eguaglianza ha la stessa forma e significato nelle due notazioni. Però il FREGE ne fa raro uso fra proposizioni. Egli scrive costantemente le due proposizioni $a \supset b$ e $b \supset a$ invece di $a = b$ (Form. I, § 1 P3).

Il FREGE introduce poi la notazione

$$\begin{array}{l} \overline{}\, b \\ \lfloor\!\!-\, a \end{array}$$

che corrisponde esattamente alla nostra $-a \cup b$. In conseguenza

cambiando a nella sua negativa, la formola

```
──┬── b
  └┬─ a
```

del FREGE equivale alla nostra $a \cup b$; e scambiando b nella sua negativa e negando il risultato, la formola

```
┬─┬┬─ b
  └── a
```

del FREGE equivale alla nostra $a \cap b$.

Essendo poi a_x una proposizione contenente una lettera variabile x, la scrittura del FREGE

$$\overset{x}{\smile}\!- a_x$$

equivale alla nostra $V =_x a_x$, ossia $(- a_x) =_x \Lambda$; e sostituendo ad a_x una delle funzioni ora considerate di due proposizioni a_x e b_x, si hanno le notazioni del FREGE

```
-x̆──┬── b_x      -x̆──┬┬─ b_x      ┬─x̆──┬┬─ b_x
     └── a_x          └── a_x           └── a_x
```

equivalenti alle nostre

$V =_x - a_x \cup b_x$, cioè $a_x - b_x =_x \Lambda$, o ancora $a_x \supset_x b_x$

$V =_x - a_x \cup - b_x$, cioè $a_x \cap b_x =_x \Lambda$

$-(V =_x - a_x \cup - b_x)$, cioè $a_x \cap b_x - =_x \Lambda$.

I due sistemi di notazioni si possono confrontare sotto l'aspetto scientifico e sotto quello pratico. Sotto l'aspetto scientifico, il sistema del FREGE è basato sui cinque segni fondamentali

```
|,  —,  ┬,  ┬─┘,  -◡-
```

mentre il nostro sui tre segni

$$-,\ \cap,\ \supset.$$

Quindi il sistema del Formulario corrisponde ad un'analisi più profonda.

Sotto l'aspetto pratico poi, il rappresentare col FREGE la moltiplicazione logica mediante un segno composto, ci fa perdere di vista le sue proprietà commutativa ed associativa.

Le notazioni adottate nel Formulario, nel concetto sono identiche a quelle di SCHRÖDER e PEIRCE; differiscono da quelle di BOOLE solo in ciò che il BOOLE considerò come idea primitiva l'eguaglianza fra due proposizioni, e come derivata la deduzione,

che espresse mediante l'eguaglianza. Invece il PEIRCE considerò come idea fondamentale la deduzione, e ne derivò l'eguaglianza. (SCHRÖDER, *Algebra der Logik*, I, p. 133).

Per ben intendere la scrittura del FREGE, si badi che nella deduzione

```
 x
-⌣——┬—— b_x
    └—— a_x
```

(cioè $a_x \supset_x b_x$), l'autore alcuna volta sopprime l'indice x e il segno -⌣-, scrivendola così ┬— b / └— a, che allora equivale al nostro $a \supset b$. Ad esempio la formola del FREGE (pag. 240)

```
|—┬—┬—— a = b
  | └—— b
  |   └— a
  └———— a
      └— b
```

equivale alla nostra $b \supset a \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a = b$ (Form., I, § 1 P18).

L'A. introduce in seguito una lunga serie di segni, di forma tale che occorre una speciale tipografia onde poterli riprodurre. A pag. 14 introduce un segno d'inversione; a pag. 18 un segno che corrisponde all'incirca all'ι del Formulario. Questi segni sono spiegati col linguaggio ordinario. I segni successivi sono definiti colla scrittura simbolica.

L'A. non ha alcun segno esattamente corrispondente all'ε del Formulario. Ne fa le veci un segno speciale che lega la variabile colla funzione (pag. 53).

Fra i due sistemi havvi pure qualche differenza nell'uso delle lettere variabili.

Nel Formulario, le lettere variabili $a, b, \ldots x, y, z$ rappresentano enti qualunque, ad es. proposizioni, classi, segni di funzione, numeri delle varie specie, punti, rette, ecc., senza limitazione alcuna; e volta per volta si deve dire che cosa si vuole indicare con una lettera variabile (vedi *Introduction au Form.*, § 13).

Il FREGE invece usa lettere greche, latine e tedesche, maiuscole e minuscole; e le sceglie in modo che la forma della lettera indichi già la natura dell'ente che esso rappresenta. Così le lettere f, g, h, sotto le loro varie forme, non stanno per indicare enti qualunque, ma bensì delle caratteristiche di funzioni (§ 19). E se questa convenzione pare porti del vantaggio, essa presenta l'inconveniente che dovendola applicare a più teorie distinte, si dovranno introdurre

tante forme di lettere quanti sono gli enti che si considerano. Inoltre il non dire in ogni caso che cosa rappresenti ogni singola lettera produce oscurità, e anche equivoci. Ad es. la prop. 126 dell'A. scritta coi simboli dell'algebra è

$$0 \leq a,$$

la quale così isolata non ha senso preciso. Occorre dire esplicitamente che a è un numero intero e positivo o nullo, e scrivere

$$a \varepsilon N_0 . \supset . 0 \leq a,$$

poichè non di necessità la lettera a è riservata ad indicare degli N_0. Anche l'Autore ne fa i più svariati usi.

Adunque, per avere una notazione completa, bisogna dire, o coi termini del linguaggio comune, o in simboli, il significato delle lettere; e se non si vuole usare il linguaggio comune, bisogna dirlo esplicitamente in simboli. Quindi la necessità dei nomi di classi (N, Q, q, q', ecc.) e del segno ε, o notazione equivalente, per unire l'individuo alla classe. Il che non impedisce che convenga, per facilitare la memoria, usare a preferenza certe lettere per indicare elementi variabili di certe classi.

Il nostro A. si occupa diffusamente delle regole di ragionamento, che spiega col linguaggio ordinario. Traducendole in simboli si hanno identità logiche tutte contenute nella parte I del Formulario. L'A. dimostra queste regole col linguaggio comune. Ma queste dimostrazioni sono illusorie. Invero, siccome queste regole sono già le più semplici regole di ragionamento, per dimostrarle o si dovranno applicare queste regole stesse, o altre più complicate. In ogni caso si fa un giro vizioso. L'unico lavoro che si possa fare su queste regole di ragionamento si è di esaminare se una regola equivalga all'insieme di più altre; e così continuando questa decomposizione si arriverà al sistema di regole più semplici, che nel Formulario, parte I, si sono chiamate proposizioni primitive.

Daremo infine un rapido cenno del metodo seguito dall'A. per trattare il numero intero. Egli lo introduce come numero degli individui d'una classe; così ottiene ciò che il G. Cantor chiamò *numero cardinale*, e che venne indicato dal Dr Vivanti nel Formulario, parte VI, § 1 P1 e § 2 P1, col segno Nc. Così la prima proposizione dell'A. (pag. 70) equivale a

$$u, v \varepsilon K . f \varepsilon v \, f \, u . \bar{f} \varepsilon u \, f \, v . \supset . \text{num}\, u = \text{num}\, v .$$

Si confronti pure la *Rivista di Matematica*, anno 1891, pag. 258.

Veramente nella scrittura dell'A. non veggo espressa l'ipotesi $u, v \varepsilon K$.

L'A. definisce lo 0, l'unità, e il successivo d'un numero con proposizioni identiche in sostanza a quelle del Formulario, parte V, § 1 P1-3.

L'infinito che egli considera (Endlos) è l'infinito numerabile, indicato nel Formulario colla scrittura Nc'N.

Questo libro deve aver costato al suo Autore grande lavoro. La sua lettura è pure assai faticosa. Certe distinzioni sono difficili ad afferrarsi, poichè spesso due termini tedeschi, fra cui l'A. fa differenza, hanno nei dizionari per corrispondente lo stesso termine italiano.

Sarebbe ora desiderabile che l'A. applicasse la sua ideografia a trattare molte parti della Matematica. Allora le formole che presentano ancora qualche oscurità, si dovranno meglio precisare con opportune notazioni. Queste notazioni stesse, che ora sono assai complicate, verrebbero semplificandosi. Ne verrà così necessariamente che le varie ideografie che si possono progettare, ove siano egualmente atte a rappresentare tutte le proposizioni, devono finire a coincidere fra loro, salvo al più la forma dei segni adottati.

(88). INTRODUCTION AU TOME II DU « FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES »

(Revue de mathématiques (Rivista di matematica), t. VI, 1896-1899, pp. 1-4, (F. 1896))

In questo lavoro, scritto subito dopo l'uscita del tomo I del « Formulario », G. PEANO afferma che ormai si ha « la soluzione » (mediante la sua ideografia) del problema di LEIBNIZ di creare una « speciosa generale », cioè una lingua o scrittura universale ove ogni ragionamento sia ridotto ad una specie di calcolo.

Come applicazione della sua ideografia egli espone poi il programma del « Formulaire de Mathématiques », in cui dovrebbero essere contenute « tutte le proposizioni conosciute nelle scienze matematiche, tutte le dimostrazioni, tutti i metodi ».

(Cfr. : U. CASSINA, *Storia ed analisi del « Formulario completo » di* G. PEANO, «Boll. Un. mat. it. », (3), 10 (1955), pp. 244-265, 544-574, § 4). *U. C.*

Gottfried Wilhelm Leibniz, pendant toute sa vie (1646-1716) s'est occupé d'« une manière de Spécieuse Générale, où toutes les vérités de raison seroient réduites à une façon de calcul. Ce pourroit être en même tems une manière de Langue ou d'Écriture universelle, mais infiniment différente de toutes celles qu'on a projetées jusqu'ici ; car les caractères, et les paroles mêmes, y dirigeroient la Raison ; et les erreurs excepté celles de fait, n'y seroient que des erreurs de calcul. Il seroit très difficile de former ou d'inventer cette langue ou caractéristique ; mais très aisé de l'apprendre sans aucuns dictionnaires » (Opera philosophica, a. 1840, p. 701).

Il énonce ce projet dans son premier travail, ou, comme il l'appelle, dans son « essai d'écolier » intitulé « de arte combinatoria a. 1666 ». Dans l' « Historia et commentatio linguae charactericae universalis, quae simul sit ars inveniendi et judicandi » (ib. p. 162), il dit que ces pensées « semper altissime infixae menti haesere ». Il fixe le temps nécessaire à la former : « aliquot selectos homines rem intra quinquennium absolvere posse puto ». Il trouve cette décou-

verte plus importante que l'invention des télescopes et des microscopes ; elle est l'étoile polaire du raisonnement. Il ajoute enfin « Itaque repeto, quod saepe dixi, hominem, qui neque Propheta sit neque Princeps, majus aliquid generis humani bono, nec divinae gloriae accomodatius suscipere nunquam posse ».

Dans ses dernières lettres il regrette « que si j'avois été moins distrait, ou si j'etois plus jeune, ou assisté par des jeunes gents bien disposés, j'espérerois donner une manière de » cette spécieuse (pag. 701). Il dit aussi (pag. 703) « J'ai parlé de ma spécieuse générale à Mr. le Marquis de l'Hospital, et à d'autres ; mais ils n'y ont point donné plus d'attention que si je leur avois conté un songe. Il faudrait que je l'appuyasse par quelque usage palpable ; mais pour cet effet il faudroit fabriquer une partie au moins de ma Charactéristique ; ce qui n'est pas aisé, surtout dans l'état où je suis ».

Après deux siècles, ce « songe » de l'inventeur du Calcul infinitésimal est devenu une réalité. Leibniz a publié bien peu sur ce problème ; mais dans ses manuscrits, publiés en 1840 par Erdmann, on trouve des idées précises, et beaucoup de propositions qui constituent la Logique mathématique (1ère partie du Formulaire). Plusieurs auteurs ont continué ces études [1]. Enfin nous sommes arrivés à terminer l'analyse des idées de logique, exprimées dans le langage ordinaire par une foule de termes (est, sont, soit, être, exister, avoir, pouvoir, donner, prendre, oui, non, et, ou, si, lorsque, déduire, tout, rien, quelque, chaque, égal, partie,...), en les exprimant toutes au moyen des idées représentées par les signes ε, $\supset$, $=$, $\cup$, $\cap$, $-$, Λ, lesquelles sont encore réductibles.

Dans le petit livre « Arithmetices principia, nova methodo exposita, a. 1889 », nous avons pour la première fois exposé toute une théorie, théorèmes, définitions et démonstrations, en symboles qui remplacent tout-à-fait le langage ordinaire.

Nous avons donc la solution du problème proposé par Leibniz. Je dis « la solution » et non « une solution », car elle est unique. La Logique mathématique, la nouvelle science composée de ces recherches, a pour objet les propriétés des opérations et des relations de logique. Son objet est donc un ensemble de vérités, et non de conventions.

[1] Les travaux les plus importants sur ce sujet ont été mentionnés et analysés dans les volumes de la « Rivista di Matematica » a. 1891 et suivants.

L'étude des propriétés différentes des idées représentées par les signes ε et ɔ nous empêche de les représenter par le même signe, bien que dans le langage ils correspondent à peu près au même terme « être ». L'identité des propriétés des expressions « est contenu » et « on déduit » nous indique qu'il n'y a entre elles qu'une différence grammaticale, et nous porte à les indiquer par le même signe ɔ. Et ainsi de suite. En changeant la forme des signes ε, ɔ,... on ne change pas ces vérités.

Ces résultats sont merveilleux, et bien dignes des éloges de Leibniz à la science qu'il avait deviné. Toutefois pour apprendre l'usage des symboles il faut de l'exercice. Nous disons par ex. q'on peut lire les signes $\cap$, $\cup$, $-$ par les mots « et, ou, non » ; en effet on obtient ainsi en général une passable lecture des formules ; mais avec un peu d'habitude on lit les propositions en symboles avec la forme même qu'ont les propositions dans le langage ordinaire.

La transformation du langage ordinaire en symboles présente des difficultés plus grandes. Il faut d'abord analyser complètement les propositions qu'on veut écrire en symboles. Mais cette analyse a son avantage ; combien de fois la proposition se transforme-t-elle en une identité, ou on y découvre des inexactitudes, des lacunes, des ambiguïtés !

On a déjà appliqué ces résultats soit à énoncer avec précision quelques propositions, soit à analyser des théories complètes, spécialement relatives aux principes toujours controversés des mathématiques. « Itaque profertur hic calculus quidam novus et mirificus, qui in omnibus nostris ratiocinationibus locum habet, et qui non minus accurate procedit quam Arithmetica aut Algebra. Quo adhibito semper terminari possunt controversiae quantum ex datis eas determinari possibile est, manu tantum ad calamum admoto, ut sufficiat duos disputantes omissis verborum concertationibus sibi invecem dicere : *calculemus*, ita enim perinde ac si duo Arithmetici disputarent de quodam calculi errore » (Leibniz, p. 98).

L'écriture simple et précise qui découle de la Logique mathématique nous donne l'instrument pour résoudre une question pratique qui s'impose tous les jours davantage. Citons encore Leibniz (p. 165) :

« Quand je considère combien nous avons de belles découvertes, combien de méditations solides et importantes, et combien se trouvent d'esprits excellens qui ne manquent pas d'ardeur pour la recherche de la vérité, je crois que nous sommes en état d'aller plus loin et que les affaires du genre humain, quant aux sciences, pour-

raient en peu de tems merveilleusement changer de face. Mais quand je vois de l'autre côté le peu de concert des desseins, les routes opposées qu'on tient,... enfin quand je considère... qu'on se contente des discours spécieux au lieu d'une méthode sérieuse et décisive, j'appréhende que nous ne soyons pour demeurer long tems dans la confusion... Je crains même, qu'on ne se dégoûte des sciences et que par un désespoir fatal les hommes ne retombent dans la barbarie. À quoi cette horrible masse de livres, qui va toujours en augmentant, pourrait contribuer beaucoup. Car enfin le désordre se rendra presque insurmontable, la multitude des auteurs qui deviendra infinie en peu de tems, les exposera tous ensemble au danger d'un oubli général, l'expérance de la gloire, qui anime bien des gens dans le travail des études, cessera tout d'un coup, il sera peut être aussi honteux d'être auteur, qu'il étoit honorable autre fois ».

Mais il ajoute «je ne laisse pas d'espérer le contraire pour des raisons très fortes». En effet bien des travaux sont justement récompensés par l'oubli complet, qui s'attache aussi à des travaux qui ne mériteraient pas cette fin.

Or il est possible de publier un *Formulaire de Mathématiques* qui contienne toutes les propositions connues dans les sciences mathématiques, toutes les démonstrations, toutes les méthodes. Elles, écrites en symboles, occupent peu de place, beaucoup moins qu'on ne pourrait croire. Il y a une infinité de livres et Mémoires inutiles, erronés, ou dans lesquels on répète ce que d'autres auteurs ont déjà dit. Ce qui reste à écrire dans le Formulaire n'est qu'une partie infiniment petite de ce qu'on a publié jusqu'à présent.

Je suppose ce formulaire terminé, ou près de l'être. Veut-on étudier un sujet quelconque? On ouvre ce Formulaire à la place convenable car on peut ordonner les sujets selon les signes qui les composent, comme on ordonne dans un dictionnaire les mots selon les lettres qui les constituent. On trouvera en quelques pages toutes les vérités connues sur ce sujet, avec leurs démonstrations et indications historiques. Si le lecteur connaît encore une proposition, qu'il a découverte, ou qu'il a trouvée, dans quelque livre, ou s'il remarque quelque inexactitude dans ces propositions, il communiquera ces additions et corrections à la Rédaction du Formulaire, qui l'annoncera dans quelque publication périodique, et en tiendra compte dans une édition suivante.

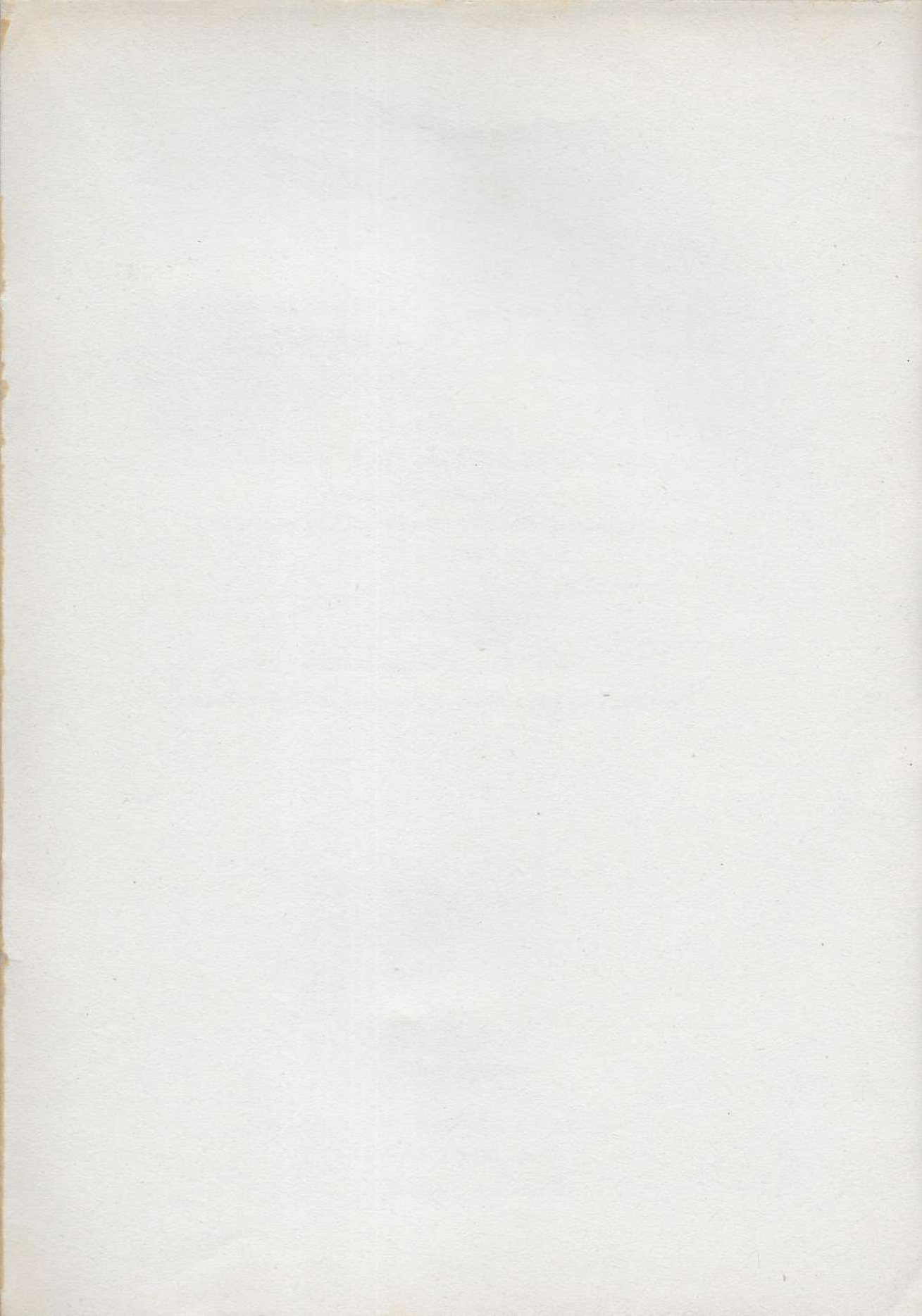
Chaque professeur pourra adopter pour texte ce Formulaire, car il doit contenir toutes les propositions et toutes les méthodes. Son

enseignement sera réduit à montrer à lire ces formules, et à indiquer aux élèves les propositions qu'il désire expliquer dans son cours.

Ce projet est assurément beau. Malheureusement son exércution surpasse le forces, non d'un homme, mais de plusieurs hommes. Seulement une société nombreuse et bien organisée pourrait l'accomplir.

En attendant que quelque société savante s'empare de ce projet, nous avons publié, avec la collaboration de plusieurs collègues, le I tome du Formulaire.

Car il n'est pas nécessaire que tout ce travail soit fini pour porter son avantage. Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants de ces sujets particuliers.

Ce premier essai présente naturellement des lacunes. Nous commençons maintenant le II volume du Formulaire; et nous publions de nouveau les parties du I tome, sur lesquelles on nous a indiqué de nombreuses corrections et additions.

(97). RISPOSTA AD UNA LETTERA DI G. FREGE

(PRECEDUTA DALLA LETTERA DI FREGE)

(Revue de mathématiques (Rivista di matematica), vol. VI, 1896-1899, pp. 53-61)

La lettera di G. FREGE e la risposta di G. PEANO, stampate nel gennaio del 1898 e qui pubblicate, sono collegate al lavoro n. 82 (del 1895).

Entrambe servono a chiarire alcuni punti importanti delle loro teorie.

Nella sua risposta G. PEANO si riferisce al F_2 § 1 — o lavoro n. 93 (del 1897) —, cioè alla sua nuova teoria matematica della logica, che differisce profondamente da quella esposta in F_1 I (parte I del trattato n. 71 (del 1895) o lavoro n. 72).

Cfr. in proposito il precedente lavoro n. 96 (del 1898). *U. C.*

Lettera del sig. G. Frege all'Editore.

Jena, den 29 Sept. 1896.

Sehr geehrter Herr Kollege!

Sie haben die Güte gehabt, meine Grundgesetze der Arithmetik im 5. Bande der Rivista di Matematica ausführlich und wohlwollend zu beurtheilen. Den Dank dafür glaube ich Ihnen am besten dadurch erweisen zu können, dass ich Ihnen freimüthig meine abweichenden Ansichten darlege. Ein solcher Gedankenaustausch wird, wie ich hoffe, die Wissenschaft fördern, besonders wenn er sich öffentlich vollzieht; und ich möchte Sie deshalb bitten meine folgenden Ausführungen in der Rivista di Matematica erscheinen zu lassen.

Sie sagen auf S. 123:

« È noto che, nel Formulario di Matematica, tutte le relazioni ed operazioni fra proposizioni e fra classi si riducono a tre fondamentali, indicate coi segni

$$\cap, \supset, -.$$

Oltre a questi si usano, per comodità, i segni $=$, $\cup$, Λ, che sono definiti mediante i precedenti ».
und auf S. 125:

« I due sistemi di notazioni si possono confrontare sotto l'aspetto scientifico e sotto quello pratico. Sotto l'aspetto scientifico, il sistema del Frege è basato sui cinque segni fondamentali

$$|, \,—, \,\top, \,\sqsubset, \,\text{-}\!\cup\!\text{-}$$

mentre il nostro sui tre segni

$$-, \cap, \supset .$$

Quindi il sistema del Formulario corrisponde ad un'analisi più profonda ».

Das Letzte möchte ich nicht zugeben. Ich bezweifele zunächst, dass Sie wirklich Alles, wass an rein logischen Gebilden gebraucht wird, mit jenen drei Zeichen bezeichnen können. Schon bei der Gleichheit habe ich Bedenken. Für das Zeichen $=$ finden wir eine Definition im Formulario I, § 1, 3 in der Form

$$a = b \,.=.\, a \supset b \,.\, b \supset a \,.$$

Aber hierbei ist offenbar die Bedeutung des zu Definirenden schon vorausgesetzt. Denn im Vorworte S. IV heisst es: « Toute définition est exprimée par une égalité; dans le premier membre on a le signe qu'on définit ». Diese linke Seite der Definitionsgleichung ist hier « $a = b$ », die rechte ist « $a \supset b \,.\, b \supset a$ » und zwischen beiden steht das Gleichheitszeichen, dessen Bedeutung man also schon kennen muss, um die Definition zu verstehen. Schon deshalb kann von einer Zurückführung der Gleichheit auf die Bedeutungen jener drei Urzeichen nicht die Rede sein. Aber auch sonst ist jene Definition nicht einwandfrei. Sie ist nicht die einzige, durch die das Gleichheitszeichen definirt wird: im Form. I, § 4, 2 folgt eine zweite, im § 5, 2 eine dritte, endlich im § 5, 11 eine vierte. Hier offenbart sich ein grundsätzlicher Widerstreit unserer Ansichten. Ich verwerfe die Vielfachheit der Definitionen für dasselbe Zeichen aus folgendem Grunde. Nehmen wir an, es lägen zwei Definitionen vor, die beide demselben Zeichen eine Bedeutung beilegen. Dann sind nur zwei Fälle denkbar: entweder geben beide dem Zeichen dieselbe Bedeutung, oder nicht. Im ersten haben wir wieder zwei Möglichkeiten: entweder beide Definitionen verleihen dem Zeichen denselben Sinn, besagen ganz dasselbe, oder nicht. Im ersten Falle ist eine von beiden überflüssig, im andern wäre zu beweisen, dass sie dem Zeichen dieselbe Bedeutung zutheilen, obwohl sie ihm verschiedenen

Sinn geben. Man müsste etwa eine von beiden als Definition stehen lassen, die andere in einen Lehrsatz verwandeln und beweisen. Um diesen Beweis betrügt man den Leser, indem man als Definition hinstellt, was ein Lehrsatz sein sollte. Wenn endlich die Definitionen demselben Zeichen verschiedene Bedeutung geben, nicht nur verschiedenen Sinn, so widersprechen sie einander, und eine von beiden muss weichen. Nun muss es auffallen, dass unser Fall keine dieser Möglichkeiten zu verwirklichen scheint; denn Ihre Definitionen des Gleichheitszeichens besagen weder alle dasselbe, noch kann die eine aus der andern bewiesen werden, noch widersprechen sie einander. Dies erklärt sich daraus, dass eine Voraussetzung nicht erfüllt ist, die wir eben gemacht haben. Die Annahme trifft nämlich nicht zu, dass jede dieser Definitionen dem Gleichheitszeichen eine Bedeutung gebe. Jede von ihnen ist mämlich unvollständig, und nur eine vollständige Definition kann einem Zeichen eine Bedeutung zuweisen. Ihre erste Definition I, § 1, 3 bezieht sich offenbar auf den Fall, wo das Gleichheitszeichen Sätze verbindet, wiewohl das nicht ausdrücklich gesagt ist; die zweite (I, § 4, 2) hat den Fall im Auge, wo es zwischen Klassenzeichen steht; die dritte (I, § 5, 2) den, wo es Einzeldinge gleich setzt, die vierte (I, § 5, 11) den, wo es Functionszeichen verbindet. Welcher Fall gemeint sei, ist in der Regel durch einen Bedingungssatz angegeben. Bedingte Definitionen nun, die Sie oft geben, verwerfe ich, weil sie unvollständig sind, weil sie nur für gewisse Fälle, nicht für alle sagen, dass der neue Ausdruck dasselbe bedeuten solle wie der erklärende. Und so verfehlen sie ihren Zweck, einem Zeichen eine Bedeutung zu geben. Warum dies? Betrachten wir die Fälle, wo es sich um einen Begriff handelt, und wo es sich um eine Beziehung handelt wie bei der Gleichheit. Eine bedingte Definition eines Begriffszeichens entscheidet nur für einige Fälle, nicht für alle, ob ein Gegenstand unter diesen Begriff falle, oder nicht; sie begrenzt den Begriff also nicht vollständig und scharf. Nun kann die Logik aber nur scharf begrenzt Begriffe anerkennen. Nur unter dieser Voraussetzung kann sie genaue Gesetze aufstellen. Das logische Gesetz, dass es ausser

$$a \text{ ist } b$$

und

$$a \text{ ist nicht } b$$

keinen dritten Fall giebt, ist eigentlich nur ein anderer Ausdruck unserer Forderung, dass ein Begriff (b) scharf begrenzt sei. Der unter dem Namen « Acervus » bekannte Trugschluss beruht darauf, dass

Worte wie « Haufe » so behandelt werden, als bezeichneten sie einen scharf begrenzten Begriff, während dies doch nicht der Fall ist. Wie es der Geometrie unmöglich wäre, genaue Gesetze aufzustellen, wenn sie Zwirnsfäden als Linien und Knoten in Zwirnsfäden als Punkte anerkennen wollte, so muss die Logik scharfe Begrenzung von dem verlangen, was sie als Begriff anerkennen kann, wenn sie nicht auf Genauigkeit und Sicherheit verzichten will. Ein Begriffszeichen also, dessen Inhalt dieser Forderung nicht genügt, ist vom logischen Standpunkte aus als bedeutungslos anzusehen. Man kann einwenden, dass solche Wörter in der Sprache des Lebens tausendfach gebraucht werden. Ja! aber unsere Volkssprachen sind auch nicht dazu geschaffen, Beweise zu führen. Und ihre hieraus entspringenden Mängel sind grade der Hauptgrund für mich gewesen, eine Begriffsschrift aufzustellen. Die Aufgabe unserer Volkssprachen ist wesentlich erfüllt, wenn die mit einander verkehrenden Menschen mit demselben Satze denselben Gedanken verbinden, oder doch annähernd denselben. Es ist dazu nicht durchaus nöthig, dass die einzelnen Wörter für sich einen Sinn und eine Bedeutung haben, wenn nur der ganze Satz einen Sinn hat. Anders liegt die Sache, wenn Schlüsse gezogen werden sollen; denn dabei ist wesentlich, dass in zwei Sätzen derselbe Ausdruck vorkomme, und dass dieser in beiden genau dieselbe Bedeutung habe. Er muss also für sich eine Bedeutung haben, die unabhängig ist von den andern Theilen des Satzes. Bei den unvollständig definirten Begriffswörtern besteht diese Unabhängigkeit nicht, sondern es kommt darauf an, ob der Fall vorliegt, auf den sich die Definition bezieht, und das hängt dann von den übrigen Theilen des Satzes ab. Man kann einem solchen Worte also überhaupt keine selbständige Bedeutung zuerkennen. Darum verwerfe ich bedingte Definitionen von Begriffszeichen.

Ganz ähnlich liegt die Sache bei den Beziehungen. Eine bedingte Definition eines Beziehungszeichens, wie etwa des Gleichheitszeichens, entscheidet nur in einigen, nicht in allen Fällen, ob die Beziehung stattfinde. So entscheidet z. B. Ihre Definition I, § 4, 2, ob a gleich b sei, nur für den Fall, dass a und b Klassen sind; sie giebt also dem Gleichheitszeichen nicht unabhängig von a und b eine Bedeutung; d. h. sie giebt ihm überhaupt keine eigne Bedeutung. Ausser den beiden Fällen

a ist gleich b

und

a ist nicht gleich b

bleibt hier noch als dritter Fall die Unentschiedenheit übrig, während doch die Logik keinen dritten Fall duldet.

Uebrigens habe ich noch sonst Bedenken gegen einzelne dieser Definitionen. So ist mir z. B.

$$« a , b \varepsilon \mathrm{K} . \supset : f \varepsilon b/a . x , y \varepsilon a . x = y . \supset . fx = fy »$$

(Form. I, § 5, 2) als Definition nicht verständlich. Wo ist das Gleichheitszeichen, auf dessen linker Seite das zu definirende Zeichen steht? Ferner kommt hier der Functionsbuchstabe «f» in der Verbindung «$f \varepsilon b/a$» ohne Argumentstelle vor. Auch in I, § 5, 11 haben wir diesen Fall bei den Functionsbuchstaben «f» und «g». Hierbei ist das Wesen der Functionen verkannt, das in ihrer Ergänzungsbedürftigkeit besteht. Diese hat nämlich zur Folge, dass jedes Functionszeichen immer eine oder mehre Stellen mit sich führen muss, die das Argumentzeichen aufzunehmen haben; und diese Argumentstellen — nicht das Argumentzeichen selbst — sind ein notwendiger Bestandtheil des Functionszeichens. Weiter finde ich einen Fehler darin, dass der Buchstabe «a» in

$$« a \varepsilon \mathrm{K} . \supset : f , g \varepsilon b/a \supset .\!\cdot. f = g . = : x \varepsilon a . \supset_x . fx = gx »$$

(I, § 5, 11) auf der rechten Seite der Definitionsgleichung steht, nicht aber auf der linken. Offenbar konnte «$f = g$» nur dann dasselbe bedeuten wie «$x \varepsilon a . \supset_x . fx = gx$», wenn die Bedeutung dieses letztern Ausdruckes von «a» unabhängig wäre.

Aber auch abgesehen hiervon werden Sie zugeben müssen, dass jede Ihrer Definitionen des Gleichheitszeichens einzeln unvollständig ist; aber Sie werden vielleicht für ihre Gesammtheit Vollständigkeit behaupten wollen. Dann müsste diese Gesammtheit sich auch äusserlich als solche darstellen. Bei der Anordnung im Formulario weiss man nach keiner dieser Definitionen, ob es die letzte sei, oder ob noch andere zur Ergänzung folgen werden. Nehmen wir an, dieser Fehler sei verbessert, die verschiedenen Definitionen des Gleichheitszeichens seien zu einem geschlossenen Ganzen vereinigt; dann wäre zu fragen, ob nun dieses Ganze eine vollständige Definition darstellte, ob die in Betracht gezogenen Fälle die gesammte Möglichkeit erschöpften, dann aber auch, ob nicht für einige Fälle Doppelbestimmungen vorlägen. Wir erkennen nun leicht, dass auch diese Gesammtheit nicht vollständig ist; denn über die Fälle, wo auf der einen Seite des Gleichheitszeichen das Zeichen eines Gegenstandes steht, der nicht eine Klasse ist, während auf der andern ein Klassenzeichen steht, ist nichts gesagt, ebensowenig über die Fälle, wo links etwa ein Satz, rechts ein Klassenzeichen oder Eigenname steht.

Natürlich meinen Sie, dass in diesen Fällen die Gleichung falsch wäre; aber aus Ihren Definitionen ist es nicht zu entnehmen.

Die Gründe, weshalb ich nicht zugeben kann, dass Sie das Gleichheitszeichen mittels der Zeichen $\cap$, O, $=$ definirt haben, sind in der Hauptsache folgende:

1. jede einzelne von diesen Definitionen ist unvollständig;

2. auch alle zusammen sind noch unvollständig, sofern sie nicht in jedem Falle entscheiden, ob Gleichheit bestehe;

3. sie erklären das Gleichheitszeichen mittels seiner selbst.

Ich habe hierbei so lange verweilt nicht so sehr der Gleichheitszeichens wegen, als vielmehr der Grundsätze des Definirens halber, die auch sonst vielfach in Betracht kommen. Ich finde überhaupt, dass Sie hierin nicht streng genug sind, und dass daher Ihre Zurückführungen logischer Gebilde auf einfachere der überzeugenden Kraft vielfach entbehren.

Wo steht ferner die Definition, durch die das Zeichen « Λ » mit den Zeichen $\cap$, O, $=$ erklärt wird? Im Formular finde ich es zuerst in I, § 3, 1, was aber nicht als Definition bezeichnet ist, als solche auch fehlerhaft wäre. In Ihren *Notations de logique mathématique* ist dies Zeichen an zwei Stellen erklärt, aber nur in Worten, und es kommen also die Zeichen $\cap$, O, $=$ gar nicht darin vor. Auch kommt hier wieder in Betracht, was ich über die Vielfachheit der Definitionen gesagt habe. Die Sache liegt hier aber etwas anders als vorhin, indem hier gar keine Fälle zu unterscheiden sind und keine von beiden Erklärungen unvollständig ist. Es bleiben hier nur die Möglichkeiten übrig entweder dass diese Erklärungen einander widersprechen, oder dass der Inhalt der einen eine Folge der andern ist, wo dann jene als Lehrsatz bewiesen werden müsste.

Wenn es sich übrigens darum handelt, alle Urzeichen aufzuführen, so ist auch das Beziehungszeichen « ε » zu nennen; denn es kann nicht mit andern definirt werden. Auch der Strich über dem Functionsbuchstaben zur Bezeichnung der Umkehrung muss als Urbezeichnung gelten. Zu den Urzeichen muss auch das « K » gerechnet werden und wohl noch viele der Klassenzeichen, die im § 2 Ihrer *Notations de logique* etc. aufgeführt sind. Ich habe für dies « K » kein besonderes Urzeichen nöthig, sondern kann dafür

$$\acute{\alpha}\,(\acute{\varepsilon}\,(\text{——}\ \varepsilon \cap \alpha) = \alpha)$$

schreiben, was nur aus meinen vorher eingeführten Zeichen besteht. Wenn ich also das einfache Zeichen K aufnehmen und definiren wollte, so könnte ich es mit der Gleichung

$$\acute{\alpha}\,(\acute{\varepsilon}\,(\text{——}\ \varepsilon \cap \alpha) = \alpha) = \mathrm{K}\,.$$

Und wenn ich das Zeichen N in Ihrer Bedeutung gebrauchen wollte, so könnte ich Ihr « N ε K » so wiedergeben :

$$N \frown \acute{\alpha}(\acute{\varepsilon}(\text{———}\ \varepsilon \frown \alpha) = \alpha)\ ,$$

oder so :

$$\acute{\varepsilon}(\text{———}\ \varepsilon \frown N) = N\ .$$

Aus diesen Gründen glaube ich nicht, dass die Anzahl der Urzeichen wirklich bei Ihnen geringer ist, als bei mir. Ich halte aber auch die blosse Abzählung der Urzeichen nicht für hinreichend, um daraus ein Urtheil über die Tiefe der zu Grunde liegenden Analyse zu gewinnen. Ich habe z. B. das Zeichen |, den Urtheilsstrich, der dazu dient, etwas als wahr zu behaupten. Sie haben kein entsprechendes Zeichen, aber Sie erkennen den Unterschied an zwischen dem Falle, dass man einen Gedanken nur ausdrückt, ohne ihn als wahr hinzustellen, und dem, wo man ihn behauptet. Wenn nun das Fehlen eines solchen Zeichens in Ihrer Begriffsschrift bewirkte, dass die Anzahl Ihrer Urzeichen sich bei genauer Prüfung als geringer herausstellte, so wäre daraus doch nicht auf eine tiefere Analyse zu schliessen; denn der sachliche Unterschied bleibt bestehen auch wenn er sich nicht in den Zeichen abspiegelt. Man müsste bei einem solchen Vergleiche auch wohl die Anzahl der selbständigen Festsetzungen in Betracht ziehen und das, was damit geleistet wird. Als solche Festsetzung müsste z. B. auch gezählt werden, dass Ku Klasse von u bedeuten sollte (*Notations* § 2) und noch manches Andere.

Mir scheint daher die Frage, auf welcher Seite die tiefere Analyse zu Grunde liege, nicht ganz einfach zu beantworten. Es kommt dabei Verschiedenes in Betracht: die Anzahl der ursprünglichen Festsetzungen, die Strenge der Grundsätze des Definirens, und was Alles mit den Urzeichen geleistet werden kann. Einstweilen möchte ich darum noch bezweifeln, dass Ihre Analyse tiefer sei, als meine.

Es wäre noch Vieles zu sagen, z. B. über meine Verwendung der lateinischen, deutschen und griechischen Buchstaben, worin Sie mich missverstanden haben, oder über die Bedingungen u, $v \varepsilon$ K, die Sie in meinem Satze (32) vermissen. Doch müsste ich dazu weiter ausholen und hoffe Ihnen später einmal darüber etwas zu schreiben.

Mit hochachtungsvollem Grusse

Ihr ergebener
G. Frege.

Risposta

Le grandi difficoltà incontrate nell'ordinamento e nella stampa di F_2 § 1 (§ 1 del tomo II del *Formulaire de Mathématiques*) ritardarono la pubblicazione del N. 2 del t. VI della nostra Rivista, e quindi anche quella dell'importantissima lettera del sig. FREGE, la quale contribuirà a rischiarare parecchi punti difficili e controversi di Logica matematica. Risponderò brevemente ad alcune sue osservazioni.

Nella mia recensione all'opera del sig. FREGE dissi che « tutte le operazioni e le relazioni fra proposizioni e fra classi si riducono alle tre fondamentali $\frown$, $\supset$, $=$ »; ma senza dubbio il sistema delle idee primitive che si incontrano in tutta la Logica è più complesso.

Secondo la raccolta delle formule di Logica, ultimamente pubblicate in F_2 § 1, le *notazioni*, esprimenti col linguaggio ordinario le idee primitive che non potemmo esprimere in simboli, sono in numero di 9, espresse dalle P1-7, 70, 100.

Su questa riduzione non è ancor detta l'ultima parola. Nelle note al F_2 § 1 accennai ad altri modi di coordinare le idee di logica; ed è possibile che la scoperta di nuove identità logiche porti ad una riduzione ulteriore.

Fra le idee primitive figura pure quella di *definizione* (P7), indicata col simbolo $=$ Df, che si legge « è uguale, per definizione ». Quantunque i segni $=$ e Df siano scritti separati, poichè l'ultimo, nel Formulario, è sempre scritto in fin di rigo, essi però formano un simbolo solo. Il sig. BURALI-FORTI nella sua *Logica matematica*, a. 1894, li avvicinò scrivendo $=_{\text{Def}}$; il sig. PIERI li fuse tipograficamente scrivendo $\equiv$; ma queste non sono che differenze formali.

Il sig. FREGE desidera per ogni segno una sola definizione. E tale è pure la mia opinione se si tratta d'un segno non contenente lettere variabili (F_2 § 1 P7). Ma se ciò che si definisce contiene lettere variabili, cioè è una funzione di queste lettere, allora io veggo in generale la necessità di dare di quella espressione delle definizioni condizionate, o definizioni con ipotesi (id. P7′), e di dare tante definizioni quante sono le specie di enti su cui eseguiamo quella operazione. Così la formula $a + b$ si definirà una prima volta quando a e b sono intieri, poi una seconda quando sono fratti, poi quando sono irrazionali, o complessi. Si incontra lo stesso segno $+$ fra numeri infiniti e transfiniti (F_1 VI), ed allora se ne deve dare una nuova definizione. Lo si incontra fra due vettori, e si definirà di

nuovo, e così via. E col progredire della scienza si estende sempre più il significato della stessa formula. I varii significati della scrittura $a + b$ hanno proprietà comuni; ma queste sono insufficienti a precisare tutti i valori che può avere quell'espressione.

Lo stesso avviene per la formula $a = b$; in alcuni casi il suo significato si può assumere come idea primitiva; in altri la si definisce, e precisamente in aritmetica, data l'uguaglianza degli intieri, si definisce l'eguaglianza fra i razionali, fra gli irrazionali, fra i numeri immaginarii, ecc. Si suol definire in geometria l'eguaglianza di due aree, di due volumi, l'eguaglianza di due vettori, ecc. Col progredire della scienza si sente sempre più la necessità di estendere il significato della formula $a = b$. I varii significati di essa hanno proprietà comuni; ma io non veggo come bastino a precisare tutti i significati possibili dell'eguaglianza.

Del resto le opinioni dei varii Autori, sul concetto di eguaglianza, diversificano assai; ed uno studio di questa questione sarebbe assai utile, specialmente se fatto coll'aiuto di simboli, anzichè di parole.

La prop. F_1 I § 5 P2 è unita alla precedente onde costituire una definizione. Essa si legge:

« Siano a e b delle classi; diremo che f è un b funzione degli a, se comunque si prenda x nella classe a, fx è un b; e se a due individui x e y, eguali, presi nella classe a, corrispondano valori della funzione, pure eguali ».

Nella nuova raccolta di formule di logica, questa definizione si è potuta scindere in due proposizioni, F_2 § 1 P500 e P503, e ciò a causa della nuova P80.

Esatta è l'osservazione della non omogeneità della F_1 I § 5 P11, che più non trovasi in F_2.

Il Formulario di Matematica non è un lavoro individuale, ma bensì va diventando sempre più un lavoro di collaborazione; e saranno accolte con gratitudine tutte le osservazioni che contribuiscono al suo incremento e perfezionamento.

G. Peano.

(102). RECENSIONE: E. SCHRÖDER, UEBER PASIGRAPHIE ETC.

(Revue de mathématiques (Rivista di matematica), vol. VI, 1896-1899, pp. 95-101)

Questa recensione — che può considerarsi come la continuazione del lavoro n. 39 (del 1891) — contiene l'esame minuto della corrispondenza fra i simboli di SCHRÖDER e quelli del *Formulario*, e lo studio del problema delle idee primitive della logica matematica. *U. C.*

E. SCHRÖDER. *Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien.*

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9 bis 11 August 1897.

« Nella discussione di un Congresso matematico internazionale tema importantissimo è quello della Pasigrafia, ed io sono persuaso che il medesimo più non sparirà dall'ordine del giorno dei futuri congressi ».

Così comincia il discorso detto, al Congresso matematico internazionale tenuto a Zurigo l'anno scorso, dal prof. Schröder, ai cui lavori la logica matematica è debitrice di tanti progressi.

Accennato rapidamente a Descartes e Leibniz, l'A. passa ad esporre i principii di questa scienza.

L'A. introduce 18 segni che, dice, formano il completo sistema di notazione della generale Pasigrafia, e che riduce a cinque categorie. Li paragona con quelli usati nel « Formulario di matematiche » e nei lavori di più Autori italiani; mediante essi definisce le classi, il numero, l'infinito, la funzione, e così via.

Applica la sua Pasigrafia alle relazioni di parentela. Parla degli attuali cultori della logica matematica, del Macfarlane, di origine inglese, del Peirce in America; e soggiunge che finora gli scopi della Pasigrafia solo in Italia hanno trovato zelanti promotori. Delle cortesi espressioni rivolte dal nostro A. agli Italiani che coltivano la

logica matematica, questi gli saranno certo grati, tantopiù che presso noi questi studii non sono ancora da molte persone apprezzati come si meritano.

Dato così un cenno generico del lavoro dello S., non sarà inutile il ricordare che le opinioni dei varii cultori di questa scienza, che ora è in rapida via di formazione, sono ancora spesso diverse.

Dei tomi I e II della grande opera dello Schröder, *Algebra der Logik*, già si è parlato in questo giornale, a. 1891, p. 164-170.

Afferro l'occasione portami dall'A. onde passare all'esame minuto di due soli punti controversi di esso, cioè:

1. La corrispondenza fra i simboli del nostro A., e quelli del Formulario.

2. Le categorie, o idee primitive della logica matematica.

In questo esame confronterò il lavoro dello S. col Formulario F_2 § 1, il quale appunto uscì stampato al Congresso di Zurigo, ove lo Schröder tenne la sua applaudita conferenza.

1.

Il confronto fra i simboli dello Schröder e quelli del Formulario è facilitato dalla corrispondenza seguente che stabilisce lo Schröder:

Schröder	0	1	$+$	$.$	Σ	Π	$\overline{a}$	$\leqq$
Formulario	$\wedge$	$\vee$	$\cup$	$\cap$	$\cup'$	$\cap'$	$-a$	$\varepsilon\supset$

(Mi permetto di dare la forma $\leqq$ ad un segno speciale dello S. che risulta dalla sovrapposizione del segno $=$ e del segno $<$ curvato).

Quindi a primo aspetto parrebbe che si può passare dalle formule scritte col sistema dello S. a quelle del F. sostituendo ai segni dell'una serie i corrispondenti dell'altra; in conseguenza la differenza fra le due teorie sia solo nella forma dei segni; e per adottare l'una forma ovvero l'altra si debbano seguire sole ragioni tipografiche.

La cosa invece è ben diversa.

Invero il nostro A., oltre agli 8 già citati usa ancora i segni $0'$ $1'$ $\cup$ $\underline{\cup}$ J; e altri. D'altra parte nel Formul. Introduction, tomo I e tomo II (*) si sono studiate successivamente le proprietà espresse

(*) Le sigle F_0, F_1 I, F_2 § 1, qui usate, corrispondono ai lavori n. 66 (del 1894), 71 (del 1895, parte I) e 93 (del 1897). *U. C.*

da più altri simboli. Così si scorge che in F_2 § 2 (Aritmetica) non si fa uso dei segni di logica ∧ ∨ ∪' ∩'; invece si usano i segni Cls, ɜ, ∃, ι, ɿ, f, ȷ, |, Sim, rep. Di questi segni non è stabilita la corrispondenza fra le due ideografie.

Ma anche la corrispondenza fra i primi 8 segni è solo approssimata, non esatta. I simboli corrispondenti dello S. e del F. hanno un campo di validità differente, come risulterà dall'esame che segue per alcuni di essi.

Lo S. fa corrispondere al segno $\leqq$ i due segni ε e $\supset$ del F. Ora i segni ε e $\supset$ esprimono idee differenti. Ciò si può riconoscere col linguaggio ordinario, poichè altro è affermare

x è un a $(x \; \varepsilon \; a)$

altro è x è una classe contenuta in a $(x \supset a)$.

Ma il miglior modo di far riconoscere la diversità di due idee si è di far vedere che esse hanno proprietà differenti.

Consideriamo perciò il sillogismo.

(F_2 §1 P25) $a, b \; \varepsilon \; \mathrm{Cls} . \, a \supset b \, . \, x \varepsilon a \, . \supset . \, x \varepsilon b$

« Siano a e b delle classi: se ogni a è b, e se x è un a, allora x è un b ».

Se al posto di $x \varepsilon a$ si legge $x \supset a$, e si aggiunge la condizione $x \varepsilon$ Cls, si ottiene ancora una forma esatta di sillogismo

$$a, b, x \; \varepsilon \; \mathrm{Cls} \, . \, a \supset b \, . \, x \supset a \, . \supset . \, x \supset b$$

che, con uno scambio di lettere, diventa la P26.

Ma si trova invece una forma falsa, se al posto di $a \supset b$ si legge $a \varepsilon b$. Poichè dalle ipotesi $a \varepsilon b \, . \, b \varepsilon c$ non si deduce punto $a \varepsilon c$, come si riconosce da esempi.

L'esempio classico è il sofisma: « Pietro e Paolo erano apostoli; ma gli apostoli erano dodici: dunque Pietro e Paolo erano dodici ».

Nella frase « gli apostoli sono dodici » il verbo « sono » non corrisponde al segno $\supset$ dell'ideografia, cioè esso non vale « (apostoli)$\supset$(12) », ma bensì al segno ε, e si può trasformare in « (apostolo)ε(classe di 12 persone) ». Già i Logici hanno distinto i due significati del termine « essere », chiamandoli « sensus compositi » e « sensus divisi », corrispondenti ai segni ε e $\supset$ del Formulario.

Sotto forma più matematica (V. F_0 § 16), dalle ipotesi

« 5 ε (numero primo) »

« (numero primo) ε (classe di infiniti numeri) »,

non dedurrò « 5 è una classe di infiniti numeri ».

Bensì (F_2 § 1 P470), dalle ipotesi $a \varepsilon b \,.\, b \varepsilon c$ si può dedurre $a \varepsilon \cup ' c$; ad es. dalle ipotesi
« a è un punto della retta b . b è una retta del fascio c » non dedurrò « a è una retta del fascio c », ma bensì « a è un punto del piano del fascio c ».

Un'altra formula in cui non è permesso di sostituire al segno ε il segno $\supset$ è la P104

$$a \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \,.\supset\colon x \, \varepsilon - a \,.=.\, x - \varepsilon \, a$$

che esprime la proprietà commutativa dei segni $-$ ed ε.

Invece non sussiste la commutatività dei segni $-$ e $\supset$. Invero « x è un non a » vale evidentemente « x non è un a »; ma « ogni a è un non b » non vale « non ogni a è un b ».

Ad es. « i numeri primi non sono tutti dispari », vera perchè $2 \, \varepsilon \, \mathrm{Np}$, non equivale alla falsa « i numeri primi sono tutti pari ».

Una terza proprietà che differenzia i segni ε e $\supset$ è espressa dalla P202

$$a \,,\, b \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \,.\supset\colon (x \varepsilon a) \cup (x \varepsilon b) \,.=.\, x \varepsilon \, (a \cup b)$$

che esprime la proprietà distributiva del segno $x\varepsilon$ rispetto al segno $\cup$. « Dire che x è un a, ovvero dire che x è un b, equivale a dire che x è un a o b ». Essa cessa di sussistere se al posto di ε si legge $\supset$; cioè da $(x \supset a) \cup (x \supset b)$ si deduce $x \supset (a \cup b)$, come afferma la P228, dovuta al Mc Coll; ma non viceversa. Così è vero « ogni numero quadrato è o un multiplo di 3, o un multiplo di 3 più 1 » $\mathrm{N}_0^2 \supset 3\mathrm{N}_0 \cup (3\mathrm{N}_0 + 1)$; ma è falso che « ogni quadrato sia un multiplo di 3 », o che « ogni quadrato sia un multiplo di 3 più uno ».

Un'altra proprietà che distingue gli stessi segni è la P401. Dal fatto che « x è un a » $(x \varepsilon a)$ si deduce « esistono degli a ». Ma dal fatto che « ogni a è b » $(a \supset b)$, non si può dedurre che esistano dei b, salvo quando ci siamo prima assicurati dell'esistenza degli a (P402).

E così via. Però le idee rappresentate dai segni ε e $\supset$, quantunque distinte, sono legate da più relazioni. Notevole è quella espressa dalla P422.

In conseguenza chi confonde e rappresenta con un sol segno le due idee espresse dai segni ε e $\supset$ del Formulario, non potrà costrurre nè una ideografia, nè un calculus ratiocinator. Non potrà costrurre una ideografia, perchè il lettore vedendo quel segno, non può distinguere se esso abbia il valore dell'ε o del $\supset$. Non può costrurre un algoritmo di ragionamento, perchè le identità del Formulario, tutte vere come sono scritte, diventano inesatte sostituendo

l'un segno all'altro; e perciò diventano false, dovendosi dichiarare falsa una proposizione quando patisce un caso d'eccezione.

Lo stesso segno $\leqq$ dello S. fra proposizioni, non ha il valore del segno $\supset$ del F. Invero S. pone il segno $\leqq$ fra proposizioni categoriche non contenenti lettere variabili, mentrechè in F_2 §1 P5 il segno $\supset$ è introdotto fra proposizioni contenenti lettere variabili, e porta degli indici espressi o sottintesi.

Analogamente si può rilevare la non identità dei segni Σ e Π di S. coi $\cup'$ e $\cap'$ di F, poichè i primi portano indici variabili, ed i secondi no, e così via.

2.

Più importante è il secondo punto, perchè qui ragioneremo su formole.

L'A. parte da 5 « Urbegriffe » o « Categorie » secondo Aristotele e Kant, che indica coi segni

$=$	$\cdot$	$-$	$\cup$	$;$
$1'$	Π			

e mediante cui definisce gli altri segni. Un lavoro analogo di riduzione delle idee di logica in primitive e derivate, è fatto in F_2 § 1, ove si danno come idee primitive, spiegate col linguaggio ordinario quelle espresse dalle P1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 70, 100, mentre di tutte le altre si dà la definizione simbolica.

Ho osservato però (F_0 pag. 50, e F_2 § 1 pag. 28) che questa distinzione delle idee in primitive e derivate ha dell'arbitrario; che in più modi è possibile costituire un sistema di idee primitive, e ne diedi qualche cenno nelle note. Quindi parmi interessante l'esaminare come lo S. abbia trattato la stessa questione.

Lo S. partendo da 5 sole categorie, pare abbia fatto una riduzione ulteriore. Ma, come egli osserva (pag. 149) « le nostre Categorie non fanno ancora l'intero sistema dei segni fondamentali », e menziona fra questi le parentesi. Anche le lettere variabili $a, b, c, \ldots$ sono dei segni. Quindi aggiungendo alle 5 categorie le convenzioni sulle parentesi, e sulle lettere variabili, espresse rispettivamente dalle P3 e 4 del F, si hanno già almeno 7 segni che non possono essere definiti. Anche la parola « Definizione » o il simbolo Df. espresso dalla P7 del F, non può essere evidentemente definito.

Inoltre lo S. considera come rappresentanti d'una stessa idea i segni = e 1', come pure i segni . e *Π*. Ora i segni = e 1' dello S. non sono equivalenti, nel senso cioè che si possano sostituire l'uno all'altro in ogni formola, come due forme tipografiche d'uno stesso segno. Quindi finchè l'A. non dà la definizione simbolica del segno 1' mediante l' = , e del segno *Π* mediante il punto, noi dobbiamo apprendere dalle spiegazioni date col linguaggio ordinario il loro valore.

In conseguenza le idee che non si possono definire simbolicamente, nella teoria dello S. sono in numero non minore di 10.

Sulla scelta e valore di queste idee primitive nulla c'è ad osserservare, essendo ogni A. libero di partire dal gruppo che più gli soddisfa. Vediamo invece come lo S. definisca gli altri segni.

La prima definizione dello S. è

$$0 = a \,.\, \bar{a}$$

la quale valendosi della corrispondenza che Egli stabilisce, si trasforma coi simboli del F, in $\Lambda = a - a$, la quale nel F_2 § 1 è preceduta dall'Hp. $a \varepsilon$ Cls , sicchè ha la forma:

$$321. \qquad a \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\!\supset\!.\, a - a = \Lambda$$

« Essendo a una classe, la classe degli a e dei non a è nulla ».

Un'Hp , come la $a\varepsilon$Cls è necessaria. Invero, siccome nel F il segno $-$ accompagna solo una classe, o una proposizione, o una relazione, se nella formula $a - a = \Lambda$ al posto di a metto una cosa che non sia nè una classe, nè una proposizione, nè una relazione, $-a$ non ha alcun significato, e quindi la proposizione $a - a = \Lambda$ è priva di senso.

Nè vale il rispondere che, essendo a un oggetto qualunque, con $-a$ si intende l'insieme degli oggetti diversi da a, classe che in F è indicata con $-\iota a$. Ma chi pone $-a = -\iota a$, ne dedurrà (P106) $a = \iota a$, e dalla P422, $x \varepsilon a \,.\!=\!.\, \iota x \supset a$, dedurrò $x \varepsilon a \,.\!=\!.\, x \supset a$, identità che non sussiste avendo già fatta rilevare la differenza dei segni ε e $\supset$. Ed essendo a una classe, $-a$ acquista due significati « classe formata dagli individui che non sono a », e « classi diverse dalla classe a ».

Adunque, essendo necessaria l'Hp. $a\varepsilon$Cls , per poter leggere la P321, è necessario che il lettore conosca già il valore dei segni ε, Cls, $\supset$, affine di poter leggere la prima proposizione dello S., sicchè il numero delle idee primitive va rapidamente aumentando.

Ma anche ammesso che si possa trascurare l'Hp. $a \varepsilon$Cls, la P dello S. non può essere assunta per Df. Invero la logica naturale non può essere soddisfatta dalla Df.

$0 = a - a$ « diciamo nulla l'a non a »

Ed esaminandola coi criterii della logica matematica, se ne vede la ragione in ciò che essa non è omogenea, poichè l'un membro è un simbolo costante 0, e l'altro è una funzione di una variabile a.

La def. che si vuol dare è questa:
« chiamiamo *nulla* il valor costante dell'espressione $a - a$, ove a rappresenta una classe qualunque », e ciò è espresso dalla F_2 §1

P435 $\wedge = \iota\, x \ni (a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a.\, a - a = x)$

la quale ha i caratteri d'una definizione. Ma non avendo lo S. a sua disposizione nessuno dei segni ι $\ni$ ε Cls $\supset$, non è in caso di poterla enunciare.

Così ho numerate 15 idee che si debbono premettere affinchè la prima def. data dallo S. abbia i caratteri d'una definizione simbolica.

(116′). DIZIONARIO DI MATEMATICA
PARTE PRIMA, LOGICA MATEMATICA

(Revue de mathématiques (Rivista di matematica),
vol. VII, 1900-1901, pp. 160-172; ristamp. Torino, tip. Gerbone, 9. XII. 1901, pagg. 16)

Una prima edizione del presente lavoro (che porta il n. 116 del nostro indice) venne presentata come saggio al Congresso dei professori italiani, tenuto a Livorno nell'agosto del 1901.

La parte II, promessa implicitamente dal titolo, può ritenersi costituita dal « Vocabulaire mathématique » annesso al lavoro n. 125 (*Formulaire mathématique*, t. IV, 1902-03).

Entrambi questi lavori hanno dato origine dapprima al « Vocabulario » inserito nel lavoro n. 137 (*Formulario mathematico*, ed. V, *Indice et Vocabulario*, Torino, 1906, Proba de 100 exemplare) ed infine al vocabolario di oltre 524 vocaboli di logica e di matematica, con versioni in varie lingue e notizie filologiche varie, contenuto nel trattato n. 138 (*Formulario mathematico*, t. V, 1908). *U. C.*

Un *Dizionario di Matematica*, cioè una raccolta dei termini che si incontrano nelle opere matematiche attuali, insieme alle osservazioni che servono a precisare il significato o i significati d'ogni termine, quali l'etimologia, la storia, la definizione, quando è possibile, riuscirà un lavoro utile tanto sotto l'aspetto scientifico quanto sotto quello didattico.

La moltiplicità dei termini usati per rappresentare una stessa idea, e la moltiplicità dei significati in cui è usato uno stesso termine costituiscono un inconveniente troppo diffuso e ben noto.

Il Dizionario potrà guidare individualmente ogni autore nella scelta dei termini più opportuni pel suo lavoro.

Esso è pure il lavoro preparatorio onde ottenere una terminologia scolastica uniforme; questione questa di alta importanza e a cui si interessa la Società « Mathesis », e di cui dottamente riferì il prof. E. DE AMICIS nel Congresso tenutosi a Torino nel 1898.

Esistono libri aventi lo stesso titolo del precedente, quali:

G. S. KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*. Leipzig a. 1803-1831, 5 vol.

cui fa seguito il

« Supplement » von J. A. GRUNERT. Leipzig a. 1833-36, 2 vol.

A. S. DE MONTFERRIER, *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées.* Paris a. 1838, 3 volumi. (Altre copie portano l'indicazione Paris a. 1845).

H. SONNET, *Dictionnaire des Mathématiques appliquées.* Paris a. 1867, 2 vol.

Ma queste opere voluminose contengono sotto ogni nome le proprietà principali dell'oggetto indicato da quel nome. Ad es. sotto il nome di *Derivata* si troverà un sommario di calcolo differenziale. Esse sono enciclopedie, e come tali non possono competere coi trattati comuni, perchè disponendo i vari soggetti in ordine alfabetico, si perde completamente l'ordine logico, che ha importanza fondamentale in tutti i trattati.

Essi poi non contengono quasi mai l'etimologia e storia dei nomi, elemento importantissimo pel perfezionamento della terminologia.

Infine essendo fatti da una sola persona, per quanto dotta e laboriosa, hanno sempre un'impronta personale; le inesattezze ed errori che inevitabilmente si riscontrano in opere di questa natura non possono più essere corrette, non essendosi ristampate edizioni ulteriori.

L'opera recente

F. MÜLLER, *Vocabulaire Mathématique (français-allemand)*, Leipzig a. 1900 p. XII+132,

è voluminosa perchè consta in gran parte di termini antiquati, e di termini proprii all'astronomia, all'astrologia, ecc.

Essa poi si limita in generale a dare la corrispondenza fra le parole francesi e le tedesche.

Eccone un estratto:

Abaciste, *Abacist*
abaisser, *erniedrigen*
abaque, *Abacus.*

Di quì non si ricava alcun significato dei termini. Anzi, essendo i termini matematici in gran parte internazionali, il dizionario si limita a una variazione di desinenze.

Vedasi pure MÜLLER, *Ueber der Mathematische Terminologie* BM. a. 1901 p. 282-325.

Per quanto possano essere utili i lavori precedenti, nessuno risponde alla questione.

Ritengo che il dizionario matematico, quale ora si intrapprende, avrà un piccolo volume, come ne fa fede la parte che segue.

È sommamente utile che il dizionario sia un lavoro di collaborazione, e che prima della stampa definitiva esso sia visto da un gran numero di persone. E ciò per togliere ogni carattere individuale al lavoro; perchè necessariamente un solo autore imprime al suo lavoro un carattere unilaterale. Inoltre la raccolta riuscirà più completa, potendo ognuno aggiungere quel nuovo termine, o quel nuovo significato d'un termine che crederà più opportuno.

Il libro riuscirà emendato dalle sviste in cui si cade necessariamente in un lavoro di questo genere.

Sarà bene che il dizionario contenga solo i termini che trovansi effettivamente nei libri in uso oggigiorno. I termini antichi eccezionalmente possono essere riportati, se c'è qualche vantaggio a richiamarli in uso.

Lo scopo principale del dizionario è quello di poterne estrarre una terminologia da adottarsi in seguito. Ma le discussioni su questa scelta sarebbero attualmente intempestive, prima che il lavoro di raccolta del materiale entro cui si deve scegliere non sia terminato.

Queste le ragioni che esposi nel congresso dei professori italiani di Matematica, tenutosi a Livorno nell'agosto 1901. Ivi si è convenuto di pubblicare un « Dizionario di Matematica », mediante la cooperazione di

Mathesis, società fra gli insegnanti delle scuole secondarie, presieduta dal prof. G. FRATTINI a Roma,

Periodico di Matematica, diretto dal prof. G. LAZZERI, a Livorno,

Rivista di Matematica, diretta dal prof. G. PEANO a Torino.

Aderirono pure:

Il Bollettino di Matematica, diretto dal prof. A. CONTI a Bologna,

Il Pitagora, diretto dal prof. FAZZARI a Palermo.

La prima parte di questo Dizionario si riferisce alla Logica matematica. Un saggio di questa parte fu presentato al congresso medesimo. Completato con aggiunte apportate dai professori VACCA, VAILATI e PADOA, quì ne segue un'edizione provvisoria.

I membri e i collaboratori degli enti associati possono pubblicare sul rispettivo giornale le aggiunte, correzioni e osservazioni che crederanno opportune.

Trascorso un tempo sufficiente, si passerà alla stampa definitiva di questa prima parte del Dizionario.

PARTE 1ª — LOGICA MATEMATICA

In questo Dizionario hanno posto i termini generali che incontransi nelle pubblicazioni matematiche. Sono esclusi cioè i termini proprii dell'Aritmetica, della Geometria e delle altre parti della Matematica.

I termini sono accompagnati dalla loro etimologia e da spiegazioni o esempi intorno al loro valore, o ai loro valori, e dalla loro trasformazione nei simboli usati nel « Formulaire de Mathématiques » (1) quando la cosa è possibile. Questi termini non sono però accompagnati da una vera definizione, perchè l'esame di quali si possono definire e quali no, richiederebbe tutta la Logica simbolica.

(1) Abbreviato in Formul. Quì si citerà l'edizione dell'a. 1901, Paris, Carré et Naud.

Addizione logica. Vedi « Somma logica ».

Analisi, ἀνά-λυ-σις = so-lu-zione. Opposto a « sintesi ».

Al testo di Euclide, libro 13, secondo Heiberg t. 4 p. 364, furono aggiunte da qualche commentatore le definizioni di analisi e sintesi, ma poco chiare. La prima, come sta scritta, enuncia una forma di ragionamento errata. Lo stesso fa Pappo libro 7 p. 634.

In Archimede, *Della Sfera* libro 2 prop. 4, l'analisi del problema consta nel porre il problema in equazione, e nella sua risoluzione. La sintesi ne è una specie di verifica o prova.

Il ragionamento analitico consta d'una serie di sillogismi della forma $b \supset c \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a \supset c$.

Invece nel ragionamento sintetico i sillogismi hanno la forma $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$.

Appartenere lat. adpertinere, ha assunto il valore di « essere parte » (vedi). Altre volte significa « è un ». (x *appartiene* alla classe a) = ($x \varepsilon a$).

Arbitrio. « Presi ad arbitrio due numeri a e b » vale quanto « Se a e b sono numeri ». Vedi essere.

Articolo. Termine grammaticale.

Diversamente unito al verbo « essere » (vedi) gli dà i valori ε, $=$, $\supset$.

Assioma = ἀξίωμα da ἄξιος = degno. Vale « proposizione primitiva » indicata nel Formul. con Pp.

Alcuni A. fanno differenza fra assioma e postulato, a seconda del grado di evidenza.

Associativa. Essendo x, y degli individui d'una classe, sia $x\alpha y$ un individuo della stessa classe. Il segno α indica un'operazione. Quest'operazione dicesi « associativa » se qualunque siano x, y, z nella classe, si ha: $(x\alpha y)\alpha z = x\alpha(y\alpha z)$.

Sono associative le operazioni aritmetiche $+$ e $\times$, e le logiche $\cap$ e $\cup$.

Il nome « associativo » fu introdotto in questo senso da Hamilton, Cambridge J. a. 1846 t. 1 p. 50.

Assurdo lat. absurdus che in origine significava « che suona male ».

(la condizione p_x è in x assurda) = (non esistono degli x che soddisfacciano alla condizione p_x) = ($-\exists\, x \ni p_x$).

Generalmente la condizione p_x è l'affermazione simultanea di più condizioni, e allora dire « il sistema è assurdo » vale quanto « le condizioni sono contradditorie ».

Astrazione. Dicesi in logica matematica « definizione per astrazione » la definizione d'una funzione φx, avente la forma:

$\varphi x = \varphi y \,.=.$ (espressione composta coi segni precedenti), cioè non si definisce il segno isolato φx, ma solo l'uguaglianza $\varphi x = \varphi y$.

Avere si trasforma in « essere ». Es. « Se si *hanno* due numeri a e b » vale « Siano a e b dei numeri ».

(4 e 6 *hanno* per massimo comune divisore 2) = $[2 = \mathrm{D}(4,6)]$.

Campo = classe.

Classe = classis, idea primitiva, indicata col simbolo Cls.

Coesistere. (Le condizioni d'un sistema coesistono) = (il sistema non è assurdo).

Coincidere vale « essere eguale ».

Commutativa. Sia $x\alpha y$ una funzione di x e di y. Si dice che l'operazione α è commutativa se $x\alpha y = y\alpha x$.

Sono commutative le operazioni logiche $\cap$ e $\cup$, e le aritmetiche $+$ e $\times$.

Dicesi poi che due operazioni f e g a eseguirsi su una sola variabile x sono commutabili fra loro quando $f(gx) = g(fx)$.

In analisi sonvi numerose coppie di funzioni commutabili,

Questo termine fu introdotto da Servois, Annales de Math. a. 1815 p. 50.

Compatibili = coesistenti (vedi).

Comune. (Classe comune alle classi a e b) = $a \cap b$.

Comunque = ad arbitrio (vedi).

Conclusione = Tesi (vedi).

Condizione = proposizione contenente variabili.

Se a è una classe, la proposizione « x è un a » in simboli « $x \varepsilon a$ », è una condizione in x.

Viceversa se p_x è una condizione in x, si può considerare la « classe degli x soddisfacenti alla condizione p_x » indicata col simbolo « $x \ni p_x$ », che si legge « x tale che p_x ». Si ha

$$x \ni (x \varepsilon a) = a \qquad x \varepsilon (x \ni p_x) = p_x .$$

Quindi data una classe, risulta determinata una condizione, e viceversa. Sicchè i termini « classe » e « condizione » esprimono la stessa idea sotto due aspetti diversi. Nel Formul. si usa il solo simbolo Cls.

Conseguenza. (La proposizione p è conseguenza della q) = ($q \supset p$).

Contenere. (La classe a è contenuta in b) = (dall'essere a si deduce essere b) = ($a \supset b$).

Contradditorio, Contrario. In logica scolastica il contradditorio del giudizio (proposizione) $a \supset b$ è $-(a \supset b)$, e il contrario è $a \supset -b$.

In matematica più proposizioni condizionali diconsi contradditorie, se il loro prodotto logico è assurdo (vedi).

Conversione. Regola di logica scolastica, per cui
dalla proposizione « qualche a è b » si passa alla « qualche b è a »
e dalla « nessun a è b » si passa alla « nessun b è a ».

Siccome in logica simbolica queste proposizioni si scrivono $\exists a \cap b$, e $-\exists a \cap b$, la conversione è una forma della regola di logica simbolica, detta « commutatività del prodotto logico ».

La conversione ora considerata dicesi pure « conversione semplice ».

Si converte la proposizione « ogni a è b » in « qualche b è a »; e questa operazione dicesi « conversione parziale, o per accidente ». Si noti però che in questo caso la proposizione « ogni a è b » non significa $a \supset b$, ma bensì « $a \supset b . \exists a$ ».

Corollario da corona, corolla, corollarium = appendice. Così Boezio *Consol.* 3·10 tradusse il greco πόρισμα = conseguenza immediata d'un teorema.

Costante. Alcune volte è un pleonasmo. « Sia a una quantità costante » vale quanto « $a \varepsilon Q$ ». Ogni lettera ha un valore costante in una stessa formola, e un valore variabile da formula a formula.

Applicata ad una funzione, la parola « costante » è tradotta con const, simbolo definito nel Formul. § 70.

Dare, è un pleonasmo. (Siano dati due numeri a e b) = (siano a e b dei numeri).

Deduzione. Se p e q sono proposizioni, la proposizione « da p si deduce q » chiamasi deduzione, e si indica con « $p \supset q$ ».

Se a e b sono classi, $a \supset b$ si suol leggere « ogni a è b » ; e vale quanto « dall'essere a si deduce essere b ».

La deduzione si esprime nel linguaggio ordinario sotto più forme.

Vedasi condizione, necessario, sufficiente, conseguenza, ...

Definizione abbreviato in Def. Nel Formul. è un'eguaglianza il cui primo membro è il segno nuovo che si definisce, ed il secondo un gruppo noto di segni. Es. (Numero primo) = (Numero divisibile solo per sè stesso, e per l'unità).

Alcuna volta si definisce un'espressione contenente lettere variabili; e la definizione è preceduta da un'ipotesi. Es.

(Essendo a e b delle frazioni) $.\supset.\ a+b =$ (espressione composta con a e b e coi segni delle operazioni aritmetiche sui numeri interi).

« Definizione possibile » è un'eguaglianza che, per un possibile ordinamento della scienza, può essere assunta come definizione.

Data una P, si riconosce facilmente se essa sia una definizione possibile. Diventa o no una Def, a seconda della teoria e dell'arbitrio dell'autore.

Il segno = d'una definizione suol leggersi « dicesi, chiamasi, indica, significa, rappresenta ».

Dimostrazione. Una dimostrazione ha in generale per scopo di persuaderci della verità d'una proposizione.

Alcune volte la dimostrazione d'un sistema di proposizioni già chiare, o verificabili coll'esperienza, ha per scopo di analizzarne le mutue relazioni, e di ridurle a un sistema di proposizioni primitive.

Le dimostrazioni sono fatte quasi sempre colla sola logica naturale.

Furono però date delle dimostrazioni in cui si ottiene una proposizione dalle precedenti con una serie di trasformazioni logiche.

Diverso = differente = (distinto) = (non eguale) = ($-\iota$).

Distributiva. Dicesi che l'operazione α è distributiva rispetto alla β se $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta(x\alpha z)$, e si indica con Distrib(α,β).

Sussistono le proprietà aritmetiche Distrib($\times$, $+$), Distrib(↑, $\times$), Distrib(lim, $+$), Distrib(lim, $\times$), ecc.

e le logiche Distrib (ε,$\cap$), ($\cap$,$\cap$), ($\supset$,$\cap$), ($\cap$,$\cup$), ($\cup$,$\cap$), e molte altre.

Il nome fu introdotto da Servois. Vedi *Commutativa.*

E, latino et. In molti casi indica il prodotto $\cap$.

(I numeri multipli di 2 *e* di 3 sono multipli di 6) = ($2N \cap 3N \supset 6N$).

(I multipli di 6 sono multipli di 2 *e* multipli di 3) = ($6N \supset 2N \cap 3N$).

Qualche volta significa $\cup$. Es.

(I multipli di 4 *e* i multipli di 6 sono multipli di 2) = ($4N \cup 6N \supset 2N$).

Eguale. « È eguale » o « eguaglia » si indica col simbolo $=$.

La parola « eguale » quando si presenta sola, è indicata nel Formul. con ι (iniziale di ἴσος). Sicchè $\varepsilon\iota$ vale quanto $=$.

Nel Formul. si ha una sola eguaglianza, detta anche identità o coincidenza. Un'eguaglianza-identità della forma $\varphi x = \varphi y$ da alcuni autori si considera come una specie d'eguaglianza fra x e y, e si indica con nomi speciali.

Eguaglianza è una scrittura della forma $x=y$.

x dicesi il primo membro, y il secondo dell'eguaglianza.

Equazione è la forma latina di « eguaglianza ». Vedi identità.

Equipollenza. Altra forma di eguaglianza, usata da Bellavitis pei vettori. Dopo i lavori di Grassmann e di Hamilton, si indica semplicemente col segno $=$.

Equivalenza. Altra forma di eguaglianza. « Le condizioni p e q sono equivalenti » vale « $p = q$ ».

« Il solido a è equivalente al solido b » vale « Volume di a = volume di b ».

Elemento. Classe contenente un solo individuo.

(La classe a è un elemento) = [$\exists a : x,y \varepsilon a \,.\supset_{x,y} .\, x=y$].

Esistere. Si indica con $\exists$.

Essere. A seconda dei casi ha i valori ε, $=$, $\supset$, $\exists$.

Es. (7 è *un* numero primo) = (7 ε Np)

(13 *è la* somma di due quadrati) = ($13 \,\varepsilon\, N^2+N^2$)

(5 e 7 *sono* numeri primi) = (5,7 ε Np)

(*Tutti* i multipli di 4 *sono* multipli di 2) = ($4N \supset 2N$)

(*Ogni* multiplo di 4 *è* un multiplo di 2) = »

(*L'*uomo *è* mortale) = (uomo $\supset$ mortale)

(13 *è la* somma di 4 e 9) = ($13=4+9$)

(*Sia* a un numero primo; si ha...) = ($a \varepsilon \mathrm{Np} .\supset. ...$)

(*Essendo* » » ») » » »

(*Sonvi* quadrati somme di due quadrati) = [$\exists\ \mathrm{N}^2 \cap (\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2)$]

Fissare è pleonasmo.

(Siano fissati due numeri a e b) = (Essendo a e b due numeri).

Funzione. (*) Siano a e b delle classi. Con bfa, che si legge «b funzione degli a» si intende ogni segno che premesso ad un individuo della classe a dà per risultato un b. Es. $\log \varepsilon\, \mathrm{qfQ}$ «logaritmo è il segno d'una funzione reale di variabile positiva».

Alcune volte il segno di funzione si scrive dopo la variabile, o si unisce diversamente.

Le funzioni d'una coppia di variabili si indicano spesso scrivendo il segno di funzione fra le due variabili. Es. $a+b$, $a-b$,...

Invece di «funzione» dicesi anche «operazione» o «corrispondenza».

Generale o **universale** dicesi una proposizione, o giudizio, della forma $a \supset b$, ovvero $a - b = \Lambda$, o sostituendo b a $-b$, $ab = \Lambda$.

Giudizio *particolare* è la negazione d'un giudizio universale, cioè della forma $\exists\ a \cap b$.

Una proposizione A dicesi qualche volta *più generale* della B, e la B caso particolare di A, se aggiungendo alla ipotesi di A una nuova ipotesi, si deduce la B.

Per es. se nella prop. $a,b \varepsilon \mathrm{N} .\supset. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aggiungo all'ipotesi la condizione $b = 1$, e semplifico, ho il caso particolare $a \varepsilon \mathrm{N} .\supset. (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

«In generale» alcuna volta significa «sempre» ed è un pleonasmo.

Altre volte dire che una proposizione «è vera in generale» significa che ha dei casi di eccezione, ossia che non è vera.

Alcuni A. dicendo che una funzione definita in un intervallo ha «in generale» una data proprietà, intendono che abbia sempre questa proprietà, tolto un numero finito di punti. E considerata in un campo piano ha «generalmente» una data proprietà, quando si debbano eccettuare solo delle linee in numero finito. Ma siccome con una linea si può coprire con continuità tutto il campo piano, questo concetto deve essere maggiormente precisato. Ad ogni modo questo valore del termine «in generale»

(*) In questo punto del lavoro n. 116′ («Rivista di matematica», vol. VII, 1900-1901, p. 167) — ed anche nell'opuscolo derivatone (lavoro n. 116″, del dicembre 1901) — sono state dimenticate alcune righe, che ora sono state ripristinate (seguendo la prima edizione, lavoro n. 116, dell'agosto 1901). *U. C.*

esce dalla logica pura, perchè contiene idee di aritmetica o di geometria.

Gruppo, alcune volte significa Classe, in simboli Cls.

(Gruppo di funzioni, o operazioni) = (classe di operazioni, tale che il prodotto funzionale di due individui di essa appartenga alla classe stessa). $a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset .$ (Gruppo di operazioni in a) =

$$\mathrm{Cls}'(a\mathrm{F}a) \cap u\ni(x,y\varepsilon u . \supset_{x,y} . xy \varepsilon u)$$

Sottogruppo. Essendo a un gruppo, nel primo o secondo significato, la frase « b è un sottogruppo di a » significa $b \supset a$.

Identità. « Gli oggetti x ed y sono identici » vale « $x=y$ ».

Una proposizione p_x contenente la variabile, o sistema di variabili, x, è un'identità, o è identicamente vera, qualunque sia x in un campo a » significa « comunque si prenda x nel campo a, si ha p_x »; in simboli $x\varepsilon a . \supset_x . p_x$. Es. $x,y\varepsilon \mathrm{N} . \supset . x+y=y+x$.

Alcuni A. chiamano identità un'eguaglianza della forma $x=x$.

Altri chiamano identità l'eguaglianza fra due espressioni, vera per tutti i valori delle lettere. Allora $x+y = y+x$ non è un'identità, perchè non è vera se x e y sono vettori sferici.

Equazione è un'eguaglianza contenente una variabile x, che sta per essere accompagnata dal segno $x\ni$. Sicchè un'eguaglianza si chiama equazione o identità, a seconda della sua posizione nell'enunciato, precisamente come un numero si chiama « termine » o « fattore » a seconda della sua posizione in una formola.

Ideografia, in tedesco « Begriffsschrift ». Scrittura in cui ogni idea è rappresentata con un segno. Sono ideografie più o meno complete la scrittura geroglifica degli antichi egiziani, come pure la cinese attuale. Ideografie parziali sono costituite dalle cifre dette arabiche, dai simboli della chimica, dai segni algebrici, ecc. L'ideografia completa, o pasigrafia, fu intravvista da Leibniz, col nome di « characteristica », che ne pose le fondamenta in scritti parzialmente da lui pubblicati, e che ora si vanno pubblicando. Vedasi specialmente:

L. Couturat — *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris a. 1901 pag. 604.

L'unione dei simboli di logica cogli algebrici permise di esprimere completamente in simboli molte parti della matematica.

Tutte le idee generali, contenute nel presente Dizionario, sono riduttibili ai simboli ideografici

$$= \quad \mathrm{Cls} \quad \varepsilon \quad \ni \quad \supset \quad \cap \quad \cup \quad - \quad \exists \quad \iota \quad ı$$

leggasi:

è eguale, classe, è, tale, dunque, e, o, non, esiste, eguale, quel.

Indipendente. (Due classi a e b sono indipendenti) $= (\exists a - b . \exists b - a)$.

Due condizioni p_x e q_x contenenti la variabile x sono indipendenti, quando lo sono le classi $x \ni p_x$ e $x \ni q_x$.

Due postulati, o proposizioni primitive, sono indipendenti, se considerando i segni che rappresentano idee primitive come variabili, esse sono in questi segni condizioni indipendenti.

Si prova l'indipendenza d'un sistema di n proposizioni primitive, portando n esempi o interpretazioni dei segni primitivi, che soddisfano a tutte le combinazioni a $n-1$ delle Pp e non alla eccettuata.

Insieme è lo stesso che classe = Cls.

Inverse (legge delle). Vedi negazione.

Ipotesi da ὑρό-θε-σις = Sup-po-sizione.

Essendo p e q condizioni, nella deduzione $p \supset q$, p è l'ipotesi.

Logica matematica è la scienza che tratta delle forme di ragionamento che si incontrano nelle varie teorie matematiche, riducendole a formole simili alle algebriche.

Essa ha comune colla logica d'Aristotele il solo sillogismo. Le classificazioni dei varii modi di sillogismi, quando sono esatte, hanno in matematica poca importanza.

Nelle scienze matematiche si incontrano numerose forme di ragionamento irreduttibili a sillogismi.

I principali teoremi di questa scienza si debbono a Leibniz (†1716), Lambert (†1777), Boole (†1864), McColl, Schröder, ecc. Nella RdM. t. 7, p. 3 si trova l'elenco di 67 memorie pubblicate su questo soggetto nell'ultimo decennio. Altre sono da aggiungere.

Legge associativa, commutativa, distributiva. Vedansi questi nomi.

Legge delle inverse, vedi negazione.

Lemma = λῆμμα da λαμβάνω = assumo.

In Archimede vale proposizione che si assume senza dimostrazione, cioè proposizione primitiva Pp.

Generalmente vale proposizione che si premette ad un teorema onde facilitarne la dimostrazione.

Membro d'un'eguaglianza (vedi).

Moltiplicazione logica vedi « Prodotto logico ».

Necessario. (La proposizione p è condizione necessaria della q) $= (q \supset p)$.

Negazione. Si indica col segno $-$ che si legge « non ».

Si ha: $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . --a = a$

« Trasportare », in Logica matematica, significa applicare la

regola:

$$a,b\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, a\supset b \,.\supset.\, -b\supset -a$$

analoga a una regola algebrica.

Questa regola è anche chiamata da alcuni « legge delle inverse ». Chiamasi « proposizione inversa » di $a\supset b$ la $b\supset a$, e « contraria » della $a\supset b$ la $-a\supset -b$. Però, mentre il passaggio da una proposizione alla sua inversa o alla sua contraria è illegittimo, è solo legittimo l'accoppiamento delle due operazioni, che esprime la regola del trasportare.

Nome. Termine grammaticale.

Nome comune = Cls.

Si possono considerare in analisi come « nomi proprii » i segni 0,1,2,... e, i, π, ecc. Del resto ogni nome comune, o nome d'una classe, è il nome proprio della classe.

La differenza fra nome e aggettivo è puramente grammaticale. Si dice « 7 è un intero » come pure « 7 è un numero intero ».

In simboli i nomi non hanno nè numeri nè casi.

Non vedi negazione.

Nulla. La classe nulla, classe non contenente individui, fu indicata con N (Nihil) da Leibniz, con 0 da Boole, con $\wedge$ nel Formul. Il suo uso è limitatissimo. Ivi si trasforma (la classe a è nulla) in (non esistono degli a), in simboli $(-\exists a)$.

O quando ha il valore del latino « vel » indica la somma logica $\cup$.

Quando ha il valore del latino « aut » fu chiamato « disgiunzione completa ». « a aut b » vale « $a-b \cup b-a$ ».

Ogni latino omnis. (ogni a è b) = $(a\supset b)$.

Parte. La classe a è parte di b significa $a\supset b$.

Altre volte significa « $a\supset b \,.\, a-=b$ ».

Particolare vedi « generale ».

Possibile si esprime con $\exists$ (esistono).

(è possibile determinare, o trovare, un numero quadrato somma di due quadrati) = $[\exists\, N^2 \cap (N^2 + N^2)]$.

Postulato = λαμβανόμενον, è indicato, insieme all'assioma (vedi), con Pp.

Prendere è pleonasmo.

(Siano a e b due numeri, presi ad arbitrio, ma fissi) = (Siano a e b dei numeri).

Preposizione. Termine grammaticale.

Le preposizioni del linguaggio comune nella traduzione in simboli si uniscono col segno di funzione, e qualche volta sono un segno di funzione.

Es. (Somma di 2 *con* 3) = 2+3
(2 moltiplicato *per* 3) = 2×3
(2 elevato *a* 3) = 2^3
(logaritmo *di* 2) = log 2
(3 metri *al* secondo) = 3m/s
(3 metri *in* 2 secondi) = 3m/(2s)
(3 lire *al* metro) = 3L/m.

Problema = πρόβλημα da προβάλλω = propongo.

Enunciato d'una condizione (o complesso di condizioni) p_x.

Risolvere il problema è trasformare la classe $x \ni p_x$ in un'altra in cui la lettera x sia scomparsa. Es. $q \cap x \ni (x^2 - 3x + 2 = 0) = \iota 1 \cup \iota 2$.

Prodotto logico di due classi a e $b = a \cap b$, e rappresenta la classe comune agli a e ai b.

La moltiplicazione logica ha le proprietà

$$a \cap a = a \quad a \cap b = b \cap a \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \quad \text{ecc.}$$

Pronome. Termine grammaticale.

Questo, quello, ecc. sono spesso rappresentati da $a, b, \ldots x, y \ldots$

Es. (Un numero più un altro numero vale quanto il secondo numero più il primo) = $(a, b \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a + b = b + a)$.

Tale che si esprime con $\ni$.

Proposizione si abbrevia con P.

Alcune P hanno il carattere di definizioni possibili. In una teoria, cioè in un ordinamento delle P relative a un dato soggetto, si scelgono fra queste le definizioni.

Altre P sono indimostrabili; esse enunciano le proprietà delle idee primitive, e si chiamano « proposizioni primitive ».

Le altre P, a seconda delle circostanze, chiamansi teoremi, corollarii, lemmi.

In Logica matematica si opera solo su proposizioni condizionali, o condizioni (vedi).

Proprietà. Sia a una classe; l'« essere un a » suolsi chiamare una proprietà. Sicchè la differenza fra proprietà e classe è puramente grammaticale.

« a è proprietà caratteristica di b » vale « $a = b$ ».

Qualche. Essendo a e b delle classi, la proposizione particolare affermativa « qualche a è b » vale quanto « esistono degli a e b » in simboli « $\exists a \cap b$ ».

Quello ha alcune volte il valore di $\overline{\iota}$.

(Essendo a e b due numeri, e b il maggiore, con $b - a$ si intende *quel* numero che aggiunto ad a dà per risultato b) =
$[a, b \varepsilon \mathrm{N} . b > a . \supset . b - a = \overline{\iota}\, \mathrm{N} \cap x \ni (a + x = b)]$.

Relazione. Una relazione fra due enti è espressa da una condizione fra i due enti. Se x,y sono gli enti variabili, e $p_{x,y}$ è la condizione, risulta determinata la classe delle coppie $(x;y)$ che soddisfano a questa condizione; essa è indicata con $(x;y)\ni p_{x,y}$.

Quindi ogni relazione può essere rappresentata da una classe di coppie.

Ad es. $(x;y)\ni[x,y\varepsilon \mathrm{q} \,.\, x^2+y^2=1]$, se identifichiamo la coppia $x;y$ di numeri reali col punto avente le stesse coordinate, rappresenta la circonferenza di centro l'origine e di raggio 1.

La condizione $p_{x,y}$ si può pure esprimere con una funzione. Pongasi $fy = x\ni(p_{x,y})$. Allora $p_{x,y}$ diventa $x\varepsilon fy$, cioè « x è un individuo della classe fy ».

Scolio = σχόλιον, vale nota, osservazione.

Se. Siano a e b delle proposizioni. « Se a, allora b » vale $a\supset b$.

Sempre. È un pleonasmo per rinforzare la deduzione.

Sintesi da σύν-θε-σις = com-po-sizione. Vedi « Analisi ».

Sillogismo. È la proposizione:

$$a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset b \,.\, b\supset c \,.\!\supset\!.\, a\supset c.$$

I logici scolastici considerarono più modi di sillogismi, che si trasformano fra loro colla conversione (vedi). Essi hanno poca importanza.

Sistema, qualche volta indica Cls.

Il sistema di due variabili x e y si indica con $(x;y)$ o (x,y).

Sistema di condizioni è l'affermazione simultanea o prodotto logico delle condizioni date. In Logica Matematica il prodotto di più condizioni è una condizione.

Soddisfare. (Gli x tali che *soddisfano* alla condizione $p_x) = (x\ni p_x)$.

Somma logica di due classi a e b è la classe formata dagli enti che appartengono ad una almeno delle classi a e b. Si indica $a\cup b$, e il segno $\cup$ si legge « o » (vedi).

Essa ha le proprietà

$$a\cup a = a \quad a\cup b = b\cup a \quad a\cup(b\cup c) = (a\cup b)\cup c \quad a\cap(b\cup c) = a\cap b \cup a\cap c \quad \text{ecc.}$$

Sufficiente. (La proposizione p è condizione sufficiente della q)=$(p\supset q)$.

Supposizione. Forma latina di ipotesi.

Tale. (Gli x *tali* che è soddisfatta la condizione p_x) = (Gli x *tali* che $p_x) = (x\ni p_x)$.

Teorema = θεώρημα, da θεωρέω = considero, indica una proposizione che si dimostra.

Tesi = θέσις. Nella deduzione $a\supset b$, b è la tesi.

Trasportare. Vedi « negazione ».

Tutto. La classe totale, o tutto, fu indicata in logica simbolica coi segni 1, ∞, V. Esso ha però poca importanza, e fu escluso dal Formulario.

Verbo. Termine grammaticale.

Corrispondono a verbi i simboli ideografici ε, $=$, $\supset$, $\exists$, $>$, $<$.

Verificare = soddisfare (vedi).

Vero. « La proposizione A è vera » vale « A ».

(157). DELLE PROPOSIZIONI ESISTENZIALI

(International Congress of Mathematicians, Cambridge, ag. 1912, vol. 2, pp. 497-500)

La logica matematica fece negli ultimi anni grandi progressi; molto si deve ai professori Burali-Forti e Padoa. Queste teorie sparse, assursero ad un corpo scientifico completo nell'opera: Whitehead and Russell, *Principia mathematica,* t. 1, 1910, t. 2, 1912.

Ivi tutte le teorie sono esposte in modo completo, e con critica profonda; le questioni più difficili ed astruse vi sono esaminate e sviluppate.

Gli autori introducono numerosi simboli, per rappresentare le varie idee di logica che essi studiano; e questi simboli sono utili e necessarii per una teoria completa delle relazioni, per l'analisi della mutua dipendenza delle proposizioni logiche, per la distinzione delle medesime in proposizioni primitive e in derivate, e per lo studio di tutte le questioni relative alla intricata teoria degli insiemi, e dei paradossi o antinomie, che si incontrano in questa teoria.

Da alcuni anni, io mi occupo della parte più elementare della logica matematica, e precisamente delle sole idee di logica che si incontrano nella matematica classica, aritmetica, algebra, calcolo infinitesimale. La logica matematica si presenta nel mio Formulario mathematico, non come scienza a sè, ma come strumento per esprimere ed analizzare le proposizioni di matematica. Varie questioni, non sono affrontate, ma quando fu possibile, furono girate ed eliminate. Per questa via il Formulario mathematico contiene solo una ventina di simboli logici, e quelli di uso comune si riducono a 10.

Per dare un esempio di questo doppio modo di trattare le questioni, o col vincerle, o coll'eliminarle, considererò le proposizioni esistenziali.

La parola *esiste* del linguaggio comune ha più valori, a seconda dei casi. Noi ci accorgiamo del diverso valore d'una stessa parola,

dalle diverse sue proprietà, e modo di comportarsi nel calcolo logico. Nelle due proposizioni :

« *Esiste* un numero quadrato somma di due quadrati »,
« *Esiste* l'integrale d'una funzione continua »

i due *esiste* hanno valori diversi ; il primo si riferisce ad una classe, il secondo ad un individuo. Anche nel linguaggio comune, essi sono formalmente distinti, poichè il primo è accompagnato dall'articolo *un*, ed il secondo da *il*.

Perciò, volendosi la corrispondenza univoca fra idee e simboli, non si possono esprimere ambe le proposizioni esistenziali con uno stesso simbolo.

Gli autori dei *Principia mathematica* introdussero perciò due simboli ∃ e E per rappresentare le due idee.

Il Formulario Mathematico invece, usa il simbolo ∃ nel primo significato. Le proposizioni di matematica in cui comparisce il secondo *esiste*, sono trasformate in modo da risultare espresse per simboli più elementari. Darò esempi dei due casi.

Il simbolo Cls si legge « classe ». E siccome una classe è determinata da una proprietà o condizione, il simbolo Cls si potrà anche leggere « proposizione condizionale », o proposizione contenente una o più variabili reali.

Λ è il simbolo della classe nulla, o vuota, o della proprietà posseduta da nessun ente, o d'una condizione assurda. Quindi $a = \Lambda$ significa « la classe a è nulla », « non esistono a », « la condizione a è assurda ».

$a \cap b$ indica la classe comune agli a e b. Quindi

$$a \cap b = \Lambda$$

significa « non esistono enti comuni alle classi a e b », ovvero « nessun a è b ».

$\sim$ (leggasi *non*) indica la negazione, e si scrive davanti ad una classe o ad una proposizione, o al segno di relazione. Quindi

$$a \sim = \Lambda$$

significa « la classe a non è nulla », ossia « esistono degli a ». E

$$a \cap b \sim = \Lambda$$

significa « esistono degli individui che sono ad un tempo a e b », cioè più comunemente « qualche a è b », proposizione particolare affermativa.

Ora in logica matematica, si suol dapprima parlare dei simboli:

ε, che indica la proposizione individuale: $x \,\varepsilon\, a$ significa « x è un a ».

$\supset$, che indica la proposizione universale affermativa: « $a \supset b$ » significa « ogni a è b », ovvero « ogni individuo che ha la proprietà a ha la proprietà b », ovvero « gli individui che verificano la condizione a, verificano pure la b », ovvero « da a segue b », o « se a, allora b ».

Poi i simboli $\cap$ (et), $\cup$ (aut), $\sim$ (non) già visti, come pure Λ (nulla).

Allora tanto la proposizione « esistono degli a », quanto l'altra « qualche a è b », si possono esprimere coi simboli precedenti, e non c'è necessità di un simbolo nuovo.

Però, un po' per brevità, e specialmente per uniformarsi al linguaggio comune, il Formulario mathematico usa spesso il simbolo $\exists$, che si legge « esiste », e che si può definire (*):

$$\exists a \,.=.\, a \sim = \Lambda \quad \text{Def.}$$

« Se a è una classe, allora noi scriveremo $\exists a$ (che si legge « esistono degli a ») invece di « la classe a non è nulla ».

Daremo alcuni esempi dall'aritmetica. Perciò conviene dire che nel Formulario, il simbolo N significa « numero intero, della serie 1, 2, 3, ... ». E per convenzioni quasi evidenti, N^2 significa « numero quadrato » e $N^2 + N^2$ vale « somma di due quadrati ». Allora si ha la proposizione aritmetica, tutta scritta in simboli

$$\exists N^2 \cap (N^2 + N^2)$$

« esistono numeri quadrati, somma di due quadrati ». Invece

$$\sim \exists\, N^3 \cap (N^3 + N^3),$$

che si può anche scrivere:

$$N^3 \cap (N^3 + N^3) = \Lambda$$

« dire che un numero è cubo, ed è la somma di due cubi, è assurdo ».

Altro esempio. La proposizione di Euclide « dato un numero m, si può determinare un numero primo maggiore di m », si potrà scrivere:

$$m \,\varepsilon\, N \,.\supset.\, \exists Np \cap (m + N).$$

(*) Il segno $\exists$ è stato introdotto da G. PEANO nel lavoro n. 91, del 1897, (*Studii di logica matematica*). U. C.

Il simbolo aritmetico « Np » vale « numero primo ».

Ora daremo esempi della seconda specie di « esiste ».

Le relazioni, indicate dai simboli $=$, $\supset$, ε, sono differenti. In vero, da $x = y$ segue $y = x$; ciò che non è vero per le relazioni $x \supset y$ e $x \varepsilon y$. La relazione ε è distributiva rispetto al segno $\cup$ (aut):

$$x \varepsilon a \cup b \cdot = : x \varepsilon a \cdot \cup \cdot x \varepsilon b.$$

« Se x è a o b, allora x è a, o x è b, e viceversa ». Ciò che non è vero pel segno $\supset$. Ma le relazioni $= \supset \varepsilon$ sono legate da numerose relazioni. Noi possiamo decomporre il segno $=$ nel segno ε e in un altro segno ι (leggasi eguale o ἴσος). Basta che noi poniamo la definizione:

$$\iota x = y \ni (y = x).$$

Allora $y \varepsilon \iota x$ vale $y = x$; e $\iota x \supset a$ vale $x \varepsilon a$. E ιx è la classe composta dal solo individuo x.

Se a è una classe che contiene un solo individuo, per $\bar{\iota} a$ noi indichiamo questo individuo. Definizione della differenza:

$$a \varepsilon \mathrm{N} \cdot b \varepsilon a + \mathrm{N} \cdot \supset \cdot b - a = \bar{\iota}\mathrm{N} \cap x \ni (a + x = b).$$

« Se a è un numero, e b è un numero superiore ad a, allora $b - a$ indica quel numero x che sodisfa la condizione $a + x = b$ ».

La prima proposizione che si presenta nella teoria della differenza è che nell'ipotesi $a \varepsilon \mathrm{N} \cdot b \varepsilon a + \mathrm{N}$, *esiste* la differenza $b - a$; ciò è che $b - a$ indica un numero determinato; e noi scriviamo:

$$a \varepsilon \mathrm{N} \cdot b \varepsilon a + \mathrm{N} \cdot \supset \cdot b - a \varepsilon \mathrm{N}.$$

Definizione del massimo:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'}\,\mathrm{N} \cdot \supset \cdot \max u = \bar{\iota} u \cap x \ni (y \varepsilon u \cdot \supset_y \cdot y \leqq x).$$

« Se u è una classe di numeri, allora max u (leggasi: massimo degli u), indica quell'individuo della classe u, e x tale che, per ogni y nella classe u, sempre è $y \leqq x$ ».

Se $u \varepsilon \mathrm{Cls'N}$, non sempre esiste max u. Per l'esistenza, noi dobbiamo aggiungere un'altra condizione:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'N} \cdot \exists u \cdot m \varepsilon \mathrm{N} \cdot \sim \exists u \cap (m + \mathrm{N}) \cdot \supset \cdot \max u \varepsilon u.$$

« Se u è una classe di numeri, e se esiste u (cioè, se la classe u non è vacua, od esistono individui nella classe u), e se m è un numero, e non esiste alcun u superiore ad m, allora max u indica un elemento della classe u (cioè, esiste max u nella classe u) ».

La definizione del *limite* d'una funzione (reale di variabile reale) può assumere più forme, ove sempre si presenta il segno $\bar{\iota}$. Data

una funzione ad arbitrio, non sempre il limite esiste. Noi consideriamo un teorema molto semplice, che afferma l'esistenza del limite:

$$x \, \varepsilon \, (\mathrm{qFN}) \, \mathrm{cres} \cdot \supset \cdot \lim x \, \varepsilon \, \mathrm{q} \cup \iota\,(+\infty).$$

« Se x è una successione crescente di quantità, allora lim x è una quantità finita o vale $+\infty$; cioè, lim x esiste nel campo delle quantità finite o infinite ».

La somma d'una serie, la derivata di una funzione, sono definite come limiti. Dunque le proposizioni « la somma della serie esiste, o la serie è convergente », « la derivata della funzione esiste », sono sempre indicate per « la somma della serie ε q », « la derivata ε q ».

Così per l'integrale.

In conseguenza, la parola *esiste*, col secondo valore, sempre è con un'espressione x che o indica un individuo, o è senza senso. Noi esprimiamo questo *esiste* in simboli, coll'affermazione $x \, \varepsilon \, u$, ove u è una classe conveniente. Quindi il Formulario mathematico adotta nessun segno speciale per il secondo *esiste*. Anche il primo *esiste* può essere eliminato, mediante il segno Λ, come noi già vedemmo. L'uso o non di simboli per indicare le due specie di *esiste*, è questione di commodità in pratica, non di necessità in logica.

(163). RECENSIONE: A. N. WHITEHEAD AND B. RUSSELL, PRINCIPIA MATHEMATICA

(Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche (Loria), 1913, pp. 47-53, 75-81, (F. 1913))

È l'ultimo lavoro che può dirsi appartenere al « Formulario completo » di G. PEANO.

(Cfr.: U. CASSINA, *Storia ed analisi del « Formulario completo » di Peano*, Boll. Un. mat. it., (3), 10 (1955), pp. 244-265, 544-574, § 1).

Prendendo lo spunto dall'opera recensita, G. PEANO, svolge nel suo indirizzo gli elementi della teoria delle « relazioni ». A tale scopo introduce i simboli: Dyade, E_1, E_2, C, $\times$.

Il segno $\times$, che permette di esprimere il prodotto di due relazioni intese come classi di « diadi » (coppie ordinate), equivale al segno $\downarrow$ introdotto nell'opuscolo n. 66 (*Notations de logique mathématique, Introduction au Formulaire*, 1894, p. 41).

Per facilitare il compito alla tipografia, che ha stampato nel 1913 il lavoro n. 163, ai simboli $\cap$ $\cup$ $\bigcap$ $\bigcup$ è stata data la forma $\frown$ $\smile$ $\sqcap$ U, che qui abbiamo conservata. *U. C.*

A. N. WHITEHEAD and B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, Vol. I, Cambridge, University Press, 1910, pag. 666; Vol. II, 1912, pag. 772.

Nota: Recensione que seque, es scripto in « Latino sine flexione ». Omni vocabulo es thema latino. Substantivo, adjectivo, pronomen, habe forma de ablativo, p. ex.: *isto, opere, grandioso* etc., aut de nominativo, quando nominativo latino non habe suffixo de casu, p. ex. *nomen, axioma, idem*. Verbo habe forma de imperativo latino: *es, consta*. Formas irregulare es facto regulare. Suffixo *-s* indica plurale, quando es necessario.

Isto opere grandioso es relativo ad principios de mathematica, objecto de numeroso studio de mathematicos et philosophos in ultimo tempore. Opere completo consta etiam ex tertio volumen, in cursu de publicatione.

(Tomo I, pag. V) « Subjecto de præsente libro surge ex conjunctione de duo differente studio moderno. Uno es labores de analystas et de geometras que formula et systematiza axiomas, et labores de

Cantor et ceteros super aggregatos. Secundo studio es symbolismo de logica, que post necessario periodo de adolescentia, nunc, gratia cultores moderno, in parte in Italia, acquire technico adaptabilitate et logico potestate, essentiale ad mathematico instrumento pro stude principios de mathematica. Ex combinatione de isto duo studio emerge duo resultatu; id es (1): quod jam es assumpto, in modo tacito aut explicito, ut axioma, es aut non necessario, aut demonstrabile; (2) methodo que demonstra axiomas supposito, vale in regiones, ut de numeros infinito, que jam es putato inaccessibile ad scientia de homo ».

(Pag. 2) « Usu de symbolismo de logica es necessario; nam ideas que occurre in isto libro, es plus abstracto que ideas de lingua familiare; nullo vocabulo de lingua commune habe sensu exacto de symbolos. Structura grammaticale de lingua commune non posside simplicitate necessario pro repræsenta pauco ideas plus simplice, sed multo plus abstracto, que surge in processu deductivo ».

Omni scientia habe vocabulario suo speciale. Vocabulos de Geometria aut non existe in lingua populare, aut habe valore differente et plus concreto. Logica-mathematica, que stude ideas, que in lingua populare es expresso, in modo pauco præciso, per vocabulos, *et, aut, es*, et alio elemento grammaticale, non pote tribue ad isto elementos grammaticale valore plus abstracto, et debe construe novo instrumento pro exprime proprio ideas, id es lingua toto symbolico.

Symbolismo da alas ad mente de homo; sed suo usu exige studio et labore. Illos que, per defectu de exercitio, judica que symbolismo es ligamen, non es obligato ad adopta illo. Nos strue novo instrumento, et non destrue instrumentos existente. Grammatica de linguas naturale, ad elementos que exprime ideas necessario in nostro discursu, misce multitudine de elementos, que exprime concordantias grammaticale, aut repetitione, toto inutile in theoria, et que produce varietates de linguas nationale. Ergo, me puta lingua plus limpido et claro, si non habe elementos inutile; tale es ratione principale de meo « latino sine flexione », simile ad formulas de algebra et de logica. Ratione secundario es suo intelligibilitate immediato, superiore ad omni lingua naturale.

(Pag. 3) « Symbolismo es terso et limpido, et permitte de repræsenta longo propositione, in forma toto visibile ab oculo in idem tempore ». Auctores adopta, in parte symbolos de *Formulario mathematico*. In aliquo casu, illos varia aut forma aut extensione de symbolos; et introduce numeroso symbolo novo. Ratione de diver-

gentia es scopo differente de symbolismo in *Formulario* et in libro de Auctores.

In *Formulario*, logica-mathematica es solo instrumento pro exprime et tracta propositiones de mathematica commune; non es fine ad se; logica-mathematica es explicato in 16 pagina; uno hora de studio suffice pro cognosce quod es necessario in applicationes de isto novo scientia ad mathematica. Libro de nostro Auctores tracta logica-mathematica ut scientia in se, et suo applicationes ad theoria de numeros transfinito de vario ordine; quod exige symbolismo multo plus amplo. Es impossibile de expone toto symbolismo de auctores. Propositiones de auctores es toto scripto in symbolos, cum demonstratione relativo; es impossibile de verte isto propositiones in lingua commune, que es multo plus longo, et non satis præciso. Ergo me verte plure propositione de Auctores in symbolos de *Formulario mathematico*, editio V, et que coincide cum notationes in libro:

A. Padoa, *La logique déductive*, Revue de Métaphysique et de Morale, 1912.

Pag. 5 et sequentes explica usu de litteras variabile; variabiles reale et apparente; divisione de propositione per punctos; definitiones.

Pag. 11. « Uno definitione es nec vero nec falso; nam es actu de volitione, non es propositione. In theoria, definitiones non es necessario, nam nos semper pote substitue definiente in loco de definiendo. Definitione habe solo utilitate typographico ».

Pag. 19 explica principio de homogeneitate in definitiones: « membro definiente et membro definiendo debe contine identico systema de litteras variabile reale. Ullo mathematico viola ce regula, et produce grave confusione ».

Auctores adopta signos:

$\frown$ (et) de multiplicatione in logica,

$\smile$ (aut) de additione,

$\sim$ (non) de negatione.

Λ (nihil), indica classe vacuo,

V (toto), indica classe totale.

$\supset$ (es contento, vel seque).

Auctores distingue forma de signos præcedente, si es inter classes aut inter propositiones aut inter relationes; *Formulario* non varia forma de symbolos; reduce omni propositione, aut conditione, ad classe de objectos que satisfac isto conditione; et omni relatione inter x et y, ut classe de dyades $(x ; y)$ que satisfac relatione, aut conditione cum duo variabile.

Auctores introduce symbolos Cls (classe), ε (propositione individuale) et $\ni$ (operatione inverso de ε), sub forma de accentu circumflexo (pag. 26).

Singulo propositione, in libro, es indicato per numero decimale, id es per parte integro, numero de capitulo, et parte decimale, que distingue propositione. Isto notatione es multo commodo, et me reproduce illo.

Parte primo de libro (pag 89-342) es relativo ad logica-mathematica. Auctores considera 6 idea primitivo, in calculo de propositiones; introduce 10 propositiones primitivo; et explica omni alio idea de calculo de propositiones, et de classes, et demonstra omni alio regula de logica.

Isto reductione de ideas et de propositiones primitivo de logica es toto novo. *Formulario mathematico*, in tomo I, incipe per calculo super propositiones, unde deduce calculo super classes. Tomo II seque itinere inverso. Tomo III contine solo serie de propositiones; indica que plure propositione habe charactere de « definitione possibile »; que plure propositione pote es reducto, aut demonstrato, per alio propositiones; id es, publica plure « demonstratione possibile »; sed construe nullo systema de ideas et de propositiones primitivo.

Propositiones primitivo de Auctores, es in parte expresso per lingua commune, et in parte in symbolos. Si nos verte symbolos de Auctores, in simbolos super classes, de *Formulario* t. V, propositiones primitivo symbolico es (pag. 100-101):

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{Cls.} \supset :$

1·2 $a \cup a \supset a$	« tautologia »
1·3 $a \supset a \cup b$	« principio de additione »
1·4 $a \cup b \supset b \cup a$	« principio de permutatione »
1·5 $a \cup (b \cup c) \supset b \cup (a \cup c)$	« principio associativo »
1·6 $a \supset b \,.\supset.\, a \cup c \supset b \cup c$	« principio de summatione »

Et deduce regulas:

2·02 $a \cap b \supset a$	« lege de simplificatione »
2·16 $a \supset b \,.\supset.\, \sim b \supset \sim a$	« lege de transpositione »
2·06 $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$	« syllogismo »
2·08 $a \supset a$	« principio de identitate »

etc. etc.

Pagina 132 introduce notatione $(x) . \varphi x$, que significa « propositione φx, continente variabile reale x, es semper vero, pro omni

x ». Nos verte propositione φx in $x \varepsilon a$, ubi a es classe; et nos verte $(x) . \varphi x$ per $x \varepsilon \mathrm{V} . \supset_x . x \varepsilon a$ « si a es ente, aut elemento arbitrario de classe totale, tunc $x \varepsilon a$ ». Symbolo V de « toto, semper vero », in *Formul.* t. 1-4 occurre solo in citationes historico, et in *Formul.* t. 5 es suppresso; nos semper substitue illo per classe variabile $a, b, \ldots$ que es « toto relativo ».

Pag. 132 tracta de propositiones existentiale, et sume ut propositione primitivo (pag. 136):

9·1 $$a \varepsilon \mathrm{Cls} . x \varepsilon a . \supset . \exists a$$

« si a es classe, et x es uno a, tunc existe ullo a ».

Et deduce propositione, in symbolos de auctores:

9·2 $$\vdash : (x) . \varphi x . \supset . \varphi y .$$

Supprime signo $\vdash$ « signo de assertione » que es implicito in numero de propositione; lege $x \varepsilon a$, ubi $a \varepsilon \mathrm{Cls}$, in loco de φx; seque:

$$x \varepsilon \mathrm{V} . \supset_x . x \varepsilon a : \supset : y \varepsilon \mathrm{V} . \supset . y \varepsilon a$$

Lege b in loco de classe V, et resulta:

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . b \supset a . y \varepsilon b . \supset . y \varepsilon a$$

que es uno forma de syllogismo.

9·22 $$a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset b . \exists a . \supset . \exists b$$

Pag. 157 stude propositiones cum duo variabile, et expone regulas:

11·2 $$x \varepsilon a . \supset_x : y \varepsilon b . \supset_y . (x ; y) \varepsilon c .\therefore = .\therefore y \varepsilon b . \supset_y : x \varepsilon a . \supset_x . (x ; y) \varepsilon c$$

« Si pro omni x in classe a, seque quod pro omni y satisfaciente conditione b, seque veritate de propositione c in x e y; tunc lice commuta duo deductione: pro omni y seque quod pro omni x es vero propositione ».

11·54 $$\exists (x ; y) \ni (x \varepsilon a . y \varepsilon b) . = . \exists a . \exists b$$

« Existentia de duo ente x, y tale que x es a, et y es b, vale existentia de a, et existentia de b ».

(*Formul.* t. V, pag. 12).

11·6 $$\exists x \ni \exists y \ni (x ; y \varepsilon a) . = . \exists y \ni \exists x \ni (x ; y \varepsilon a)$$

« Existe x tale que existe y tale que conditione $x ; y \varepsilon a$ es vero; significa: existe y tale que existe x tale que ... ».

Id es, lice commuta duo signo $\supset\supset$, cum indices differente; et duo $\exists\exists$ cum litteras differente. Sed non lice commuta $\supset$ et $\exists$. Isto commutatione es facto, per errore, ab numeroso et celebre mathematico.

Pag. 176 defini æqualitate, cum regula de Leibniz:

13·101 $x = y . = : a \varepsilon \mathrm{Cls} . x \varepsilon a . \supset_x . y \varepsilon a$

« Objecto x æqua y, si omni proprietate de x es proprietate de y »; et deduce proprietates reflexivo, symmetrico et transitivo de æqualitate.

Pag. 196 expone theoria de classes, deducto ex theoria de propositiones. Pag. 218 expone postulatos de algebra de classes, secundo Huntington.

Pag. 245 expone logica de relationes, theoria quasi toto novo.

Formulario indica dyade (coppia, couple) de objectos x et y per $x ; y$. In aliquo casu analystas scribe (x , y); sed isto notatione pote produce ambiguitates. Nam

20·04 $x , y \varepsilon a . = . x \varepsilon a . y \varepsilon a$

« $x , y \varepsilon a$ » significa « x es a, et y es a »; dum $x ; y \varepsilon a$, aut $(x , y) \varepsilon a$ de notatione commune, significa que dyade $x ; y$ es uno elemento de classe a.

Omni propositione $p\,(x ; y)$ continente duo variabile reale x et y, exprime uno relatione inter x et y, et determina classe de dyades

$$(x ; y) \ni [p\,(x ; y)]$$

Pro explica notationes et propositiones de auctores, me introduce notationes sequente

(1) $\mathrm{Dyade} = z \ni \exists\, (x ; y) \ni (z = x ; y)$ Def.

« dyade es omni ente z, que pote es reducto ad forma $x ; y$ ».

(2) $\mathrm{E}_1\,(x ; y) = x \quad . \quad \mathrm{E}_2\,(x ; y) = y \quad . \quad \mathrm{C}\,(x ; y) = y ; x$ Def.

« $\mathrm{E}_1\, z$, si z es dyade, indica suo primo elemento; $\mathrm{E}_2\, z$ es suo secundo elemento; $\mathrm{C}\, z$ es dyade converso ». Resulta:

(3) $z \varepsilon \mathrm{Dyade} . \supset . z = \mathrm{E}_1\, z ; \mathrm{E}_2\, z \quad . \quad \mathrm{C}\, z = \mathrm{E}_2\, z ; \mathrm{E}_1\, z \quad . \quad \mathrm{CC}\, z = z .$

$$\mathrm{E}_1\,\mathrm{C}\, z = \mathrm{E}_2\, z \quad . \quad \mathrm{E}_2\,\mathrm{C}\, z = \mathrm{E}_1\, z$$

Si r es classe de dyades, aut relatione, tunc $\mathrm{E}_1 \text{‘}\, r$ (ubi signo ‘ es definito in *Formul.* V, pag. 77) es vocato ab Auctores « dominio de r », et $\mathrm{E}_2 \text{‘}\, r$, aut $\mathrm{E}_1 \text{‘}\, \mathrm{C} \text{‘}\, r$, es « dominio converso de r » (pag. 261); et classe $x \ni [x ; y \varepsilon r]$ es « referentes de y in relatione r » (pag. 255).

31·33 $r \varepsilon \mathrm{Rel} . \supset . \mathrm{C} \text{‘}\, \mathrm{C} \text{‘}\, r = r$

33·24 $r \varepsilon \mathrm{Rel} . \supset : \exists\, r . = . \exists\, \mathrm{E}_1 \text{‘}\, r . = . \exists\, \mathrm{E}_2 \text{‘}\, r$

33·25·26 $r , s \varepsilon \mathrm{Rel} . \supset . \mathrm{E}_1 \text{‘}\, (r \frown s) \supset \mathrm{E}_1 \text{‘}\, r \frown \mathrm{E}_1 \text{‘}\, s . \mathrm{E}_1 \text{‘}\, (r \smile s) = \mathrm{E}_1 \text{‘}\, r \smile \mathrm{E}_1 \text{‘}\, s$

33·32 $r, s \varepsilon \mathrm{Rel}. \mathrm{E}_1 ‘ r \frown \mathrm{E}_1 ‘ s = \Lambda . \supset . r \frown s = \Lambda$

N. 34 defini producto, in sensu logico, de duo relatione. In præsente recensione, me indica illo per signo arithmetico $\times$.

34·01 $r, s \varepsilon \mathrm{Rel}. \supset . r \times s = (x ; z) \ni \exists y \ni (x ; y \varepsilon r . y ; z \varepsilon s)$ Def.

id es, relatione $x ; z \varepsilon r \times s$ resulta ex eliminatione de y ex relationes $x ; y \varepsilon r$ et $y ; z \varepsilon s$.

Auctores enuntia et demonstra proprietates:

$p, q, r, s \varepsilon \mathrm{Rel}. \supset.$

34·2 $\mathrm{C} ‘ (r \times s) = (\mathrm{C} ‘ s) \times (\mathrm{C} ‘ r)$

34·21 $p \times (q \times r) = (p \times q) \times r$

34·25 $p \times (q \smile r) = (p \times q) \smile (p \times r)$

34·26 $(p \smile q) \times r = (p \times r) \smile (q \times r)$

34·34 $r \supset p . s \supset q . \supset . r \times s \supset p \times q$

34·36 $\mathrm{E}_1 ‘ (p \times q) \supset \mathrm{E}_1 ‘ p \quad . \quad \mathrm{E}_2 ‘ (p \times q) \supset \mathrm{E}_2 ‘ q$

Auctores introduce signo $\vdots$ de Formul. pag. 79, sub forma de sagitta ascendente:

35·04 $a, b \varepsilon \mathrm{Cls}. \supset . a \vdots b = (x ; y) \ni (x \varepsilon a . y \varepsilon b)$

id es, $a \vdots b$ repræsenta omni dyade, de que primo elemento es uno a, et secundo elemento es uno b.

Tunc « relatione inter objectos de classe a et objectos de classe b » vale « classe de $a \vdots b$ ».

35·21 $a, b \varepsilon \mathrm{Cls}. r \varepsilon \mathrm{Rel}. \supset . (a \vdots \mathrm{V}) \frown r \frown (\mathrm{V} \vdots b) = (a \vdots b) \frown r$

ut resulta ex propositiones de prof. Padoa, publicato in 1900, et reimpresso in Formul. t. 5, pag. 79.

In modo simile:

35·31 $r \frown (\mathrm{V} \vdots a) \frown (\mathrm{V} \vdots b) = r \frown (\mathrm{V} \vdots a \frown b)$

35·354 $[r \frown (\mathrm{V} \vdots a)] \times s = r \times [(a \vdots \mathrm{V}) \frown s]$

35·412 $(\mathrm{V} \vdots a) \frown (\mathrm{V} \vdots b) = (\mathrm{V} \vdots a \frown b)$

35·52 $\mathrm{C} ‘ (a \vdots b) = b \vdots a$

35·85 $\exists a . \exists b . \supset . \mathrm{E}_1 ‘ (a \vdots b) = a . \mathrm{E}_2 ‘ (a \vdots b) = b$

36·25 $a \varepsilon \mathrm{Cls}. r \varepsilon \mathrm{Rel}. r \frown (a \vdots a) = r . \supset . r \varepsilon \mathrm{Cls}' (a \vdots a)$

N. 37 considera relatione que resulta per eliminatione de y ex propositiones

$$x ; y \varepsilon r . y \varepsilon a .$$

In præsente recensione, me indica resultatu per $x \varepsilon r \times a$.

37·01 $r \varepsilon \text{Rel} . a \varepsilon \text{Cls} . \supset . r \times a = x \ni [\exists a \frown y \ni (x ; y \varepsilon r)]$ Def.

$r, s \grave{\varepsilon} \text{Rel} . a, b \grave{\varepsilon} \text{Cls} . \supset :$

37·33 $(r \times s) \times a = r \times (s \times a)$

37·401 $r \times a = \text{E}_1 ` [r \frown (\text{V} \,!\, a)]$

37·412 $[r \frown (\text{V} \,!\, a)] \times b = r \times (a \frown b)$

37·2 $a \supset b . \supset . r \times a \supset r \times b$

37·22 $r \times (a \smile b) = r \times a \smile r \times b$

37·32 $\text{E}_1 ` (r \times s) = r \times \text{E}_1 ` s$

Si $r \varepsilon$ Rel, et si $y \varepsilon \text{E}_2 ` r$, tunc $r \times \iota y$ repræsenta « referentes de y in relatione r »:

$$r \varepsilon \text{Rel} . y \varepsilon \text{E}_2 ` r . \supset . r \times \iota y = x \ni [x ; y \varepsilon r]$$

Nunc, si nos scribe ry in loco de $r \times \iota y$, nos identifica relatione r, ad functione r que ad omni y in classe $\text{E}_2 ` r$ fac corresponde uno classe de $\text{E}_1 ` r$; id es, cum notationes de *Formulario*, t. V, pag. 80:

$$r \varepsilon (\text{Cls}' \text{E}_1 ` r) \text{F} (\text{E}_2 ` r)$$

Tunc formulas præcedente pote es scripto sub novo forma:

37·01 $a, b \varepsilon \text{Cls} . r \varepsilon (\text{Cls}' b) \text{F} a . \supset . r \times a = x \ni [\exists a \frown y \ni (x \grave{\varepsilon} ry)]$ Def.

Signo $\times$ de præsente recensione coincide cum sagitta descendente in « Introduction au Formulaire » 1894, pag. 41. Expressione $r \times a$, cum tres elemento, debe es decomposito in $(r \times) a$, et non $r (\times a)$. Expressione $r \times a$ vale $\text{U} \, r ` a$ de Formulario, t. 5, pag. 82.

Si in 37·01, in loco de a me scribe ιy, ubi $y \varepsilon a$, resulta $r \times \iota y = r y$, quod justifica identificatione præcedente.

Auctores introduce symbolo Cls^2, cum valore « classe de classes »:

60·03 $\text{Cls}^2 = \text{Cls}' \text{Cls}$

et, secundo *Formulario*, tomo V, pag. 82, sed cum forma pauco differente, illos pone:

40·01 $k \varepsilon \text{Cls}^2 . \supset . \cap k = x \ni (y \varepsilon k . \supset_y . x \varepsilon y)$ Def.

40·02 » $\supset . \text{U} k = x \ni \exists k \frown y \ni (x \varepsilon y)$ Def.

«Si k es classe de classes, tunc $\cap k$, producto logico de k, indica omni objecto x, pertinente ad omni classe y de k, et $\text{U} k$, summa de k, indica omni objecto x, pertinente ad ullo classe y de k». Per exemplo, si k es fasce de rectas, id es classe de rectas jacente in idem

plano, et que transi per idem puncto, $\cap k$ es isto puncto, et $\mathrm{U}k$ es illo plano.

40·16 $k, l \varepsilon \mathrm{Cls}^2 . k \supset l . \supset . \cap l \supset \cap k . \mathrm{U}k \supset \mathrm{U}\, l$

40·171 $\mathrm{U}\, k \smile \mathrm{U}\, l = \mathrm{U}\, (k \smile l)$

40·18 $\cap (k \smile l) = \cap k \frown \cap l$

et plure alio, debito ad prof. Burali-Forti, et collecto in Formulario, t. 5, pag. 82.

N. 42 da plure novo et notabile proprietate de summa et producto logico:

42·1 $k \varepsilon \mathrm{Cls' Cls' Cls} . \supset . \mathrm{U}\, (\mathrm{U}\, y \,|\, y \text{ ‘ } k) = \mathrm{U}\, (\mathrm{U}\, k)$

42·11 $\cap (\cap y \,|\, y \text{ ‘ } k) = \cap (\mathrm{U}\, k)$

et in modo plus breve: $\mathrm{U}\, (\mathrm{U} \text{ ‘ } k) = \mathrm{U}\, (\mathrm{U}\, k) . \cap (\cap \text{ ‘ } k) = \cap (\mathrm{U}\, k)$.

Per exemplo, si a et b es punctos, nos indica per $a\, b$ segmento de recta inter a et b (aut semirecta, aut recta, si lectore præfer). Illo es classe de punctos.

Tunc si a, b, c es punctos $(a\, x) \,|\, x \text{ ‘ } b\, c$ indica systema, aut fasce, de radios $a\, x$, ubi x es puncto de $b\, c$. Ergo $(a\, x) \,|\, x \text{ ‘ } b\, c$ es classe de classe de punctos, id es classe de radios, aut fasce de radios, et

$$\mathrm{U}\, [(a\, x) \,|\, x \text{ ‘ } (b\, c)] = \text{triangulo } a\, b\, c$$

considerato ut loco de punctos.

Si a, b, c, d es quatuor puncto, vertices de tetrahedro,

$$[(a\, x) \,|\, x \text{ ‘ } (b\, y)] \,|\, y \text{ ‘ } (c\, d)$$

es classe de classe de classe de punctos, id es systema de fasces de radios que ab a projecta omni puncto de $b\, y$, ubi y es puncto de segmento $c\, d$.

$$\{\mathrm{U}\, [(a\, x) \,|\, x \text{ ‘ } (b\, y)]\} \,|\, y \text{ ‘ } (c\, d) = (a\, b\, y) \,|\, y \text{ ‘ } (c\, d) =$$

systema de triangulos $a\, b\, y$, ubi y describe segmento $c\, d$.

$$\mathrm{U}\, \{[(a\, x) \,|\, x \text{ ‘ } (b\, y)] \,|\, y \text{ ‘ } (c\, d)\} = a\, x \,|\, x \text{ ‘ } (b\, c\, d) =$$

systema (stella) de radios que ab a projecta punctos de triangulo $b\, c\, d$. Nunc si nos opera per U super fasce de triangulos, aut super stella de radios, nos semper obtine tetrahedro $a\, b\, c\, d$. Vide Mathematische Annalen, t. 37, pag. 194.

Pag. 363 incipe tractatione de numeros cardinale. Auctores elimina definitiones per abstractione. In plure casu, mathematicos in-

troduce novo ente φx, non per definitione de forma

$$\varphi x = \text{expressione composito per } x \text{ et symbolos noto,}$$

sed defini solo æqualitate:

$$\varphi x = \varphi y \,.=.\, \text{relatione } p_{x,y} \text{ composito per } x, y \text{ et elementos noto.}$$

Auctores proba que definitione per abstractione pote es reducto ad definitiones nominale; suffice de pone

$$\varphi x = y \ni (p_{x,y}) \,.$$

« Per exemplo, definitione de numero cardinale, in Formul. t. 5, pag. 135 es dato per abstractione:

$$a, b \,\varepsilon\, \text{Cls.} \supset : \text{Num}\; a = \text{Num}\; b \,.=.\, \exists\, (b \,\text{F}\, a) \text{ reciproco} \quad \text{Def.}$$

« Si a et b es classes, nos dice que numero de a æqua numero de b, si existe correspondentia univoco et reciproco inter a et b ». Nos non defini Num a, sed solo relatione Num $a =$ Num b.

Auctores transforma definitione præcedente in nominale, sub forma:

$$a \,\varepsilon\, \text{Cls.} \supset . \text{Num}\; a = \text{Cls} \cap b \ni [\exists\, (b \,\text{F}\, a) \text{ recipr.}]$$

« Si a es classe, Num a indica classe de classes b, que es in correspondentia uno-uno cum a ».

In præsente recensione, me seque methodo de Formulario.

Auctores defini numero 1:

52·16 $\quad a \,\varepsilon\, \text{Cls.} \supset .\!\cdot\!. \text{Num}\; a = 1 \,.=:\, \exists\, a : x, y \,\varepsilon\, a \,.\supset_{x.y} .\, x = y$

Symbolo 1 de Auctores vale symbolo Elem de prof. Padoa (vide suo opusculo sopra citato), et symbolo Un de prof. Burali-Forti.

Es digno de nota propositiones novo sequentes:

53·01 $\quad a \,\varepsilon\, \text{Cls.} \supset . \bigcap \iota a = a$

53·1 $\quad a, b \,\varepsilon\, \text{Cls.} \supset . \bigcap (\iota a \cup \iota b) = a \cap b$

54·14 $\quad a \,\varepsilon\, \text{Cls.}\; k \,\varepsilon\, \text{Cls ' Cls.} \supset . \bigcap (k \cup \iota a) = (\bigcap k) \cap a$

N. 50 introduce symbolo de relatione *æquale;* si nos confunde $r \times \iota y$ cum ry, ut supra nos explica, nos pote confunde relatione *æquale* cum symbolo ι de Formulario, et introducto ab Auctores in N. 51.

50·16 $\quad a \,\varepsilon\, \text{Cls.} \supset . \iota \times a = a$

50·4 $\quad r \,\varepsilon\, \text{Rel.} \supset . r \times \iota = \iota \times r = r$

Auctores reproduce et demonstra plure propositione de Formulario. Inter propositiones novo, me cita:

51·221 $\quad a \,\varepsilon\, \text{Cls.}\; x \,\varepsilon\, a \,.\supset .\, a = (a \sim \iota x) \cup \iota x$

51·23 $\iota x = \iota y \,.=.\, x = y$

Et da rationes de necessitate de symbolos ι et $\imath$, deficiente in symbolismo incompleto de Boole et de Schröder.

53 22 $a \,\varepsilon\, \text{Cls} \,.\supset.\, \text{U}\,(\iota\text{‘}\,a) = a$

54·21 $\iota x \smile \iota y = \iota x \smile \iota z \,.\supset.\, y = z$

55·13 $z\,;w = x\,;y \,.=.\, z = x \,.\, w = y$

55·232 $a\,,b \,\varepsilon\, \text{Cls} \,.\supset:\, \exists\,(\iota x \,!\, a) \frown (\iota y \,!\, b) \,.=.\, x = y \,.\, \exists\, a \frown b$

60·362 $\text{Cls'}\,(\iota x) = \iota\Lambda \smile \iota\iota x$

60·5 $a \,\varepsilon\, \text{Cls} \,.\supset.\, \text{U}\,(\text{Cls'}\,a) = a$

N. 62 stude proprietates de relatione ε.

Formulario, pag. 75, considera identitate « idem », quem in præsente relatione, me indica per signo ω. Ergo $\omega x = x$, pro omni x. Et si a es classe, $x \,\varepsilon\, a$ vale $x \,\varepsilon\, \omega\, a$.

50·16 $\iota \times = \omega$

62·3 $k \,\varepsilon\, \text{Cls' Cls} \,.\supset.\, \omega \times k = \text{U}\,k$

« Signo U, summa de classes, vale ω-ullo », aut $\omega \times = \text{U}$.

N. 71 tracta de relationes r que ad omni elemento in $\text{E}_2\text{‘}\,r$ fac corresponde uno solo elemento in $\text{E}_1\text{‘}\,r$; id es de functiones ad uno valore.

71·25 $a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \text{Cls} \,.\, f \,\varepsilon\, a\,\text{F}\,b \,.\, g \,\varepsilon\, b\,\text{F}\,c \,.\supset.\, fg \,\varepsilon\, a\,\text{F}\,c$

71·252 $a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \text{Cls} \,.\, f \,\varepsilon\, (a\,\text{F}\,b)\,\text{rcp} \,.\, g \,\varepsilon\, (b\,\text{F}\,c)\,\text{rcp} \,.\supset.\, fg \,\varepsilon\, (a\,\text{F}\,c)\,\text{rcp}$

concordante cum Formulario, pag. 75, P. 4·7.

72·241 $u \,\varepsilon\, \text{Functio simile} \,.\supset.\, (u^{-1})^{-1} = u$

N. 73 tracta de classes simile, vel de numero æquale; isto numero es in generale, infinito:

$$a\,,b \,\varepsilon\, \text{Cls} \,.\supset:\, \text{Num}\,a = \text{Num}\,b \,.=.\, \exists\,(b\,\text{F}\,a)\,\text{rcp}$$

Auctores demonstra proprietates reflexivo, symmetrico et transitivo de relatione $\text{Num}\,a = \text{Num}\,b$, quod da jure ad nos de scribe illo sub forma de æqualitate.

73·3 $\text{Num}\,a = \text{Num}\,a$ dem. $(\omega x \mid x\,,a) \,\varepsilon\, (a\,\text{F}\,a)\,\text{rcp}$

« Num a æqua Num a; nam relatione ωx ubi varia x, in campo a, es correspondentia reciproco inter a et a ».

73·31 $\text{Num}\,a = \text{Num}\,b \,.\supset.\, \text{Num}\,b = \text{Num}\,a$

Vale propositione: $f \varepsilon (b \mathrm{F} a)$ rcp. $\supset . f^{-1} \varepsilon (a \mathrm{F} b)$ rcp

73·32 $\mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, b . \mathrm{Num}\, b = \mathrm{Num}\, c . \supset . \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, c$

Vale propositione 71·252, supra scripto.

73·41 $a \varepsilon \mathrm{Cls}. \supset . \mathrm{Num}\, \iota ` a = \mathrm{Num}\, a$

« Classe a es tam numeroso ut classe de classes $\iota ` a$ ».

73·71 $a , b , c , d \varepsilon \mathrm{Cls}. \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, b . \mathrm{Num}\, c = \mathrm{Num}\, d . a \frown c = \Lambda .$
$b \frown d = \Lambda . \supset . \mathrm{Num}\, (a \smile c) = \mathrm{Num}\, (b \smile d)$.

73·88 $a , b , c \varepsilon \mathrm{Cls}. a \supset b \supset c . \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, c . \supset . \mathrm{Num}\, b = \mathrm{Num}\, c$

es celebre theorema enuntiato ab Cantor, et demonstrato ab Schröder, Bernstein, Zermelo, etc. Vide « Revista de Mathematica » t. 8, 1902-06, pag. 136. In demonstratione commune, occurre idea de numero naturale. Sed theorema es de logica, et non de arithmetica; ergo suo demonstratione debe es independente ab idea de numero, et in modo speciale, debe es independente ab principio de inductione; quod es facto ab plure auctore.

N. 80 tracta de selectione de individuos arbitrario in systema de classes. Plure auctore jam dice: « Si k es systema de classes, tunc in omni classe a de systema k, me selige uno elemento arbitrario x ».

Sed hodie es noto que non lice selige numero infinito de entes arbitrario (Vide p. ex. Revista de mathematica, t. 8 pag. 145). Isto selectione depende ab principio vocato « axioma multiplicativo ». Auctores da numeroso expressione æquivalente de isto principio, sed non demonstratione.

Selectione de elementos in k pote es definito ut seque:

$$k \varepsilon \mathrm{Cls}' \mathrm{Cls} . \supset . \mathrm{Select}\, k = (\mathrm{U}\, k \mathrm{F} k) \frown f \ni (a \varepsilon k . \supset_a . f a \varepsilon a)$$

Tunc forma plus simplice de axioma multiplicativo es:

88·37 $k \varepsilon \mathrm{Cls}' \mathrm{Cls}. \Lambda \sim \varepsilon k . \supset . \exists\, \mathrm{Select}\, k$

Si f es functione ad uno valore, et x es valore variabile, tunc in analysi, $f^2 x , f^3 x$ indica $f f x , f f f x$, functiones iterato. Si f es functione cum plure valore, nos pote considera serie de classes $f x$, $f \times f x , f \times f \times f x$, etc. Auctores defini successione de classes, que resulta ab operatione repetito, sine introductione de numeros naturale, nam nos es in logica, non in arithmetica. Principio de inductione, que in arithmetica es postulato, nunc es posito in definitione.

90·01 $r \varepsilon \mathrm{Rel}. \mathrm{E}_1 ` r \supset \mathrm{E}_2 ` r . \supset .\!\cdot.\, x ; y \varepsilon \mathrm{Potestate}\, r . = : y \varepsilon \mathrm{E}_2 ` r : m \varepsilon \mathrm{Cls}.$
$r \times m \supset m . y \varepsilon m . \supset_m . x \varepsilon m$

« Si r es relatione, aut classe de dyades, et classe de primo elementos de r es contento in classe de secundo elementos, tunc nos dice quod dyade $x ; y$ habe inter se relatione que es potestate de r, si y es uno ex secundo elementos de r; et si nos sume ad arbitrio uno classe m, tale que $r \times m$ es parte de m, et que contine y, illo classe m contine x ».

Studio de potestates de uno relatione, aut de producto $r \times s$ de duo relatione, et de casus quando relatione es univoco, aut biunivoco, duce ad theoremas elegante et interessante, que continua usque ad termino de primo volumen.

Volumen secundo tracta de numeros cardinale, finito aut infinito, de operationes super illos, de series, et de limites de functiones. Et me spera de pote loque de illo inter pauco tempore.

(181). SUL PRINCIPIO D'IDENTITÀ

(Bollettino della Mathesis, a. VIII, Pavia, 1916, pp. 40-41)

Cfr. il lavoro n. 177 (del 1915). *U. C.*

Nell'articolo « Le definizioni per astrazione », in questo Bollettino, dicembre 1915, dopo riportata la regola di Leibniz relativa all'eguaglianza, pag. 107, notai la sua coincidenza con uno degli enunciati del polimorfo principio di identità della logica scolastica; e quindi ritenni probabile che qualche studioso potesse trovare quell'enunciato in libri più antichi. Il mio desiderio fu ampiamente appagato.

Il prof. Giov. Vacca, dottissimo in tutte le scienze, mi rispose subito col seguente passo di S. Tommaso d'Aquino (nato nel 1226, morto nel 1274; quindi vissuto nel fiore della scolastica medioevale):

« Quaecumque sunt idem, ita se habent, quod quidquid praedicatur de uno, praedicatur et de alio » (1),

cioè: « Due cose identiche sono tali che tutto ciò che si afferma dell'una, si afferma anche dell'altra ». Questa forma è estremamente prossima all'enunciato simbolico:

$$x = y \cdot = : a \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \cdot x \, \varepsilon \, a \cdot \supset_a \cdot y \, \varepsilon \, a .$$

Ancora il prof. Vacca mi cita il seguente passo di Aristotele, Topica, libro VII, cap. I, 15, ove, parlando di cose identiche, o eguali, *ταὐτά*, dice:

ὅσα γὰρ θατέρου κατηγορεῖται, καὶ θατέρου κατηγορεῖσθαι δεῖ

= nam quaecumque de uno praedicantur, ea etiam de altero praedicari debent.

(1) Divi Thomae Aquinatis, Summa theologica, Romae 1886, pars I, quaestio XL, art. I, 3.

Il principio d'identità fu espresso in simboli nel Formulario mathematico, edizione 2ª, 1897, proposizione 80.

Questo principio è la definizione dell'eguaglianza? Sappiamo che una questione di questo genere non ha senso. Noi possiamo riconoscere se una proposizione abbia i caratteri di « definizione possibile ». L'essere essa assunta, o meno, come definizione, dipende dalla volontà dello scrittore.

Il principio di identità, scritto in simboli, contiene due volte il segno $=$; se questi segni si ritengono identici, allora non potendosi definire l'$=$ mediante l'$=$, quella proposizione non ha i caratteri di definizione possibile.

Ma noi possiamo ritenere che il secondo $=$ significhi « è eguale per definizione » o « noi conveniamo di indicare »; e lo possiamo distinguere graficamente dal primo mettendoci come indice un *Def*:

$$x = y \cdot =_{\mathrm{Def}} : a \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \cdot x \, \varepsilon \, a \cdot \supset_a \cdot y \, \varepsilon \, a \, ,$$

ove il segno *Def* si può anche scrivere in fine della linea. Così è fatto nel citato Formulario; ivi, assunta questa proposizione come definizione, si deducono, colle proposizioni 81, 82, 83, le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva della relazione $=$.

Il compianto Pieri, nei suoi numerosi ed universalmente apprezzati lavori in simboli di logica matematica, distingue l'« eguale per definizione », dandogli la forma $\equiv$. Vedasi p. es. « Sui principii che reggono la Geometria di Posizione », Atti Acc. Torino, 26 gennaio 1896.

La teoria della 2ª edizione del Formulario fu riprodotta nella 3ª edizione del 1901, pag. 18. Nelle edizioni 4ª del 1903, e 5ª del 1908, molte teorie logiche, fra cui questa, non furono più ristampate. Ma quel principio, assunto come definizione, servì di base agli importanti lavori già citati dei professori Burali-Forti e Catania.

(184'). EGUALE

(Il Bollettino di matematica (Conti), a. XV, 1917-18, pp. 195-198,
dal « Supplemento al Dizionario di cognizioni utili », UTET, Torino, 1917)

Saggio di esposizione didattica della teoria dell'eguaglianza.

(Cfr. i lavori n. 177 (del 1915) e n. 181 (del 1916), di questo volume, ed il lavoro n. 206 (del 1924) non contenuto nelle presenti « Opere scelte »). *U. C.*

Eguale. — Questa idea si rappresenta in matematica col segno =. Dapprima si usava la parola *aequatur,* poi la sua iniziale *ae*, *æ*, α, ∞ che si trovano da VIETA (m. 1603) a LEIBNIZ (m. 1716). La forma =, che si incontra in RECORDE, anno 1557, adottata da NEWTON (m. 1727), è ora di uso universale.

La relazione $x = y$ si legge « x è eguale ad y », o « x eguaglia y », o « x è lo stesso di y », « x è identico ad y », « x vale y ». Altre forme del linguaggio ordinario per esprimere la stessa idea sono le seguenti:

« 2 e 3 *fanno* 5 », in simboli $2 + 3 = 5$
« 6 *è il* prodotto di 2 e 3 », id. $6 = 2 \times 3$
« Il chilogramma *consta* di 1000 grammi », id. . . kg. = 1000 gr.
« Il metro *si divide* in 1000 millimetri », id. . . . . . m. = 1000 mm.
« Quintale *significa* 10 Mg. », id. . . . . Q. = 10 Mg.
« π *rappresenta* il rapporto della circonferenza al diametro », id. . . . . . π = ecc.
« e *indica* la base dei logaritmi neperiani », id. . . e = ecc.
« Il diametro del soldo *è di* 25 mm. », id. . . . . . diam. soldo = 25 mm.
« Il soldo pes*a* 5 gr. », id. . . peso del soldo = 5 gr.

In quest'ultimo esempio il segno $=$ è indicato dalla desinenza *a* della parola *pesa*.

Siccome l'idea $=$ è espressa nel linguaggio comune da più voci sinonime, volendo definire l'una di queste mediante un'altra, si cade nel circolo vizioso. Così « dire che due numeri sono *eguali* significa che essi sono uno *stesso* numero » è una definizione rotatoria.

La relazione $=$ si può determinare mediante le sue proprietà.

Sia $x\mathrm{R}y$ una relazione fra gli enti x e y. Essa si dice *riflessiva*, se qualunque sia x, si ha $x\mathrm{R}x$. La relazione si dice *simmetrica* se da $x\mathrm{R}y$ segue $y\mathrm{R}x$. E si dice *transitiva*, se da $x\mathrm{R}y$ e $y\mathrm{R}z$ segue $x\mathrm{R}z$.

La parola *transitiva* si deve a De Morgan, nel 1856. La parola *simmetrica* fu usata in questo senso da Schröder nel 1890.

La parola *riflessiva* fu introdotta da Vailati, nella *Rivista di Matematica* di Torino, anno 1891, pag. 134.

La relazione $=$ ha le proprietà:

$x = x$;

da $x = y$ segue $y = x$,

da $x = y$ e $y = z$ segue $x = z$;

ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le relazioni « x è il padre di y », « x è diverso da y », godono di nessuna delle proprietà precedenti.

La relazione « la retta x è perpendicolare alla y » è simmetrica, non riflessiva, nè transitiva.

La relazione « il numero x è maggiore del numero y », in simboli « $x > y$ », è transitiva, ma non simmetrica nè riflessiva. Lo stesso avviene di « x è prima di y », « x è sopra y », « x è a nord di y ».

La relazione « x è multiplo di y » ha le proprietà 1 e 3, e non la 2.

La relazione « la retta x giace in uno stesso piano colla retta y » ha le proprietà 1 e 2, e non la 3.

Le tre proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva, sono indipendenti; cioè esistono relazioni soddisfacenti due condizioni e non la terza. Così:

« il numero a ha un divisore comune con b » è riflessiva e simmetrica e non transitiva;

« il numero a è multiplo di b » è riflessiva e transitiva e non simmetrica;

« a e b sono numeri primi » è simmetrica e transitiva e non riflessiva.

Una relazione che sia ad un tempo riflessiva, simmetrica e transitiva fu detta *egualiforme,* dal prof. PADOA.

Ognuna delle relazioni fra poligoni « x coincide con y », « x è sovrapponibile ad y », « x ed y si possono decomporre in parti sovrapponibili », « x è simile ad y », è egualiforme. Se la prima si indica col segno $x = y$, le altre debbono essere indicate con segni o parole differenti.

EUCLIDE (vedasi ad esempio libro I, prop. 35 e 36) esprime la coincidenza colla parola *αὐτός = stesso, identico*; e la sovrapponibilità delle due figure, o delle loro parti, colla parola *ἴσος = eguale.* Gli autori di geometria, dopo LEGENDRE, indicano colla parola *eguale* la sovrapponibilità delle due figure, e con *equivalente* la sovrapponibilità delle parti. Alcuni autori moderni fanno distinzioni più minute.

Quindi le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva non bastano a definire l'eguaglianza.

Essa si può definire dal principio: « Due cose sono identiche, se tutto ciò che può essere attribuito all'una deve pure essere attribuito all'altra ». Questa proposizione trovasi in ARISTOTELE (*Topica*, libro VII, cap. 1, § 15), ed è riprodotta dagli scolastici medioevali e dai filosofi del 1600. In vece di «ciò che si può attribuire», si può dire « proprietà »; e il principio diventa: « Due cose sono eguali se ogni proprietà dell'una è pure proprietà dell'altra », o « se ogni classe che contiene l'una contiene pure l'altra »; o « se in ogni proposizione al posto dell'una si può sostituire l'altra, e la verità della proposizione rimane ».

Questa condizione, che alcuni filosofi chiamano «principio di identità», contiene la parola *identico* (o *eguale*), e la parola *proprietà* (o *classe*, o *proposizione*). Quindi può servire per precisare le due idee.

Non ci possono essere due enti aventi tutte le stesse proprietà. Così nell'eguaglianza $2 = 2$, il primo 2 sta a sinistra e il secondo 2 sta a destra del segno $=$, perciò hanno proprietà differenti. Quindi, nella definizione di eguaglianza, alla parola *proprietà* bisogna attribuire un senso stretto; ovvero attribuendo a questa parola il senso largo che ha, conviene distinguere fra proprietà reali e proprietà formali.

Una proprietà di un ente è *reale* se essendo vera per un ente, è pure vera per ogni suo eguale; è invece *formale* nel caso opposto.

In aritmetica si ha $^2/_3 = {}^4/_6$, e $^2/_3$ è una frazione irreduttibile; invece $^4/_6$ non lo è; dunque l'essere una frazione *irreduttibile* non è una proprietà reale della frazione, ma bensì una proprietà della forma speciale con cui ci è rappresentata la frazione.

Nell'eguaglianza $2 + 3 = 5$, il primo membro è un binomio, ed il secondo un monomio; perciò le parole *monomio, binomio,* ecc. esprimono proprietà della scrittura, non dell'ente rappresentato. « Il numeratore della frazione $^2/_3$ è 2 » è pure una proprietà formale della scrittura rappresentante la frazione, non è proprietà della frazione.

Si riferiscono alla rappresentazione, e non all'idea rappresentata, le parole: « frazione irreduttibile, monomio, polinomio, termine di una somma, fattore di un prodotto, coefficiente, base ed esponente d'una potenza, numeratore e denominatore d'una frazione, dividendo e divisore, ecc. ». Esprimono invece enti reali le parole « somma, differenza, prodotto, quoziente, ecc. ». Questi si possono rappresentare coi simboli $+$, $-$, $\times$, $/$; quelli no. Le parole esprimenti proprietà formali si possono ridurre a poco, e anche sopprimere del tutto dall'algebra, ottenendo così semplicità e chiarezza.

Sia $x\mathrm{R}y$ una relazione fra x e y, e sia riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè egualiforme. Indichiamo con $\mathrm{R}y$ la classe degli x tali che soddisfano la condizione $x\mathrm{R}y$. Allora, dire che $y\mathrm{R}z$ significa dire $\mathrm{R}y = \mathrm{R}z$, cioè ogni relazione egualiforme si può ridurre all'eguaglianza fra classi. Se indico con R una qualunque delle classi $\mathrm{R}y$ ove y è un individuo del sistema considerato, allora la relazione $y\mathrm{R}z$ si trasforma nell'altra « y e z appartengono alla stessa classe R ».

Una relazione egualiforme si può anche ridurre ad una eguaglianza fra enti diversi dalle classi. Così la relazione « il poligono x si può scomporre in parti sovrapponibili a quelle di y » si può trasformare in « area di x = area di y ». La relazione egualiforme « la retta x è parallela alla y » si può trasformare nell'eguaglianza fra classi « il fascio di rette parallele ad x = fascio di parallele ad y », ovvero « direzione di x = direzione di y ».

Vedansi su questo soggetto alcuni articoli pubblicati sul *Bollettino della Mathesis*, anni 1915 e 1916, dai prof. PALATINI, CATANIA, ecc. ove sono pure indicati numerosi altri autori.

(126). DE LATINO SINE FLEXIONE

LINGUA AUXILIARE INTERNATIONALE

(Revista de mathematica (Rivista di matematica), vol. VIII, 1902-1906, 20 ott. 1903, pp. 74-83)

È il primo scritto di G. PEANO dedicato al problema della lingua ausiliaria internazionale ed agli studi filologici.

Esso incomincia in latino scolastico e termina in latino sine flexione.

Cfr. in proposito il lavoro n. 128 (del 1904).

Il foglio della rivista contenente il lavoro n. 126 porta la data 1903, die 293 (= 20 ottobre), ma una prima stesura di esso — che differisce in più punti da quella definitiva — apparve il 27 agosto 1903, in un apposito opuscolo contenente anche la nota n. 127 e costituente il lavoro n. 127′ (del 1903) del nostro indice.

Il lavoro n. 126 (del 1903) venne ripubblicato da N. MASTROPAOLO nella rivista « Schola et Vita », Milano, 1933, vol. 8, pp. 123-132. *U. C.*

Lingua latina fuit internationalis in omni scientia, ab imperio Romano, usque ad finem saeculi XVIII. Hodie multi reputant illam nimis difficilem esse, iam in scientia, magis in commercio.

Sed non tota lingua latina est necessaria; parva pars sufficit ad exprimendam quamlibet ideam.

§ 1. — *Casus*

> « Nominum casus semper eliminari possunt substitutis in eorum locum particulis quibusdam ».
>
> LEIBNIZ. Ed. Couturat a. 1901, p. 67.

Lingua latina exprimit nominum casus cum praepositionibus « *de, ad, ab, ex, ...* » et cum postpositionibus vel desinentiis. Prima methodus sufficit; ipsa sola invenitur in latino populare, a quo derivant linguae neolatinae, ut italica, franca, hispanica, etc.

Sumimus nomen inflexibile sub forma simpliciore, quae est ablativus, vel nominativus, vel alia.

Indicamus genitivo cum *de*, dativo cum *ad*, ablativo cum *ab*, *ex*, ... Accusativo indicatur cum constructione, ut in linguis neolatinis, scilicet cum serie: nominativo—verbo—accusativo, vel cum serie: *qui*-accusativo—nominativo—verbo.

Vocabulario latino commune continet nominativo et genitivo de nomen. Regula commoda haec est:

« Sumimus nomen inflexible
« *a*) aut identico ad nominativo,
« *b*) aut nominativo, mutata desinentia *-us, -um, -u, -es*
« in *-o, -o, -o, -e*,
« *c*) aut genitivo, mutata desinentia *-i* in *-o*, *-is* in *-e*.
« *d*) ad nominativo *ego, tu, aliquis*, responde (ablativo) *me, te, aliquo* ».

Regula *a*) producit nulla ambiguitate, quae iam non sit in latino.

Regulae *b*) *c*) *d*) brevi exprimunt formatione de ablativo, cum reductione de 4-a declinatione ad 2-a, et cum reductione ad forma unica de 3-a declinatione.

§ 2. — *Genere masculino, feminino et neutro.*

« Discrimen generis nihil pertinet ad grammaticam rationalem ».
LEIBNIZ.

Nomen isolato non habet genere. Quum volumus indicare ille, scribemus explicite " mas, femina ".

Ita " mater est *bona* " fit " mater est femina bono "; sed idea de femina iam continetur in mater; igitur post simplificatione [1]: " mater est bono ".

Indicatione de genere evanescit saepe in lingua scientifica.

In lingua familiare sufficit conservare genere in uno pronomen " is, ea, id ", vel in antiquo " hi, hae, ho ".

§ 3. — *Numero singulare et plurale.*

« Videtur pluralis inutilis in lingua rationali ». LEIBNIZ.

Nomen isolato non habet numero. Ad indicando ille scribemus explicite " uno, plure ".

---

[1] Juxta *Formulaire de Mathématiques* a. 1902, p. 7, Prop. 3·1 et 5·3.

Ex. "unum os habemus et duas aures"
fit "habemus uno uno ore, et duo plure aure",
et post simplificatione logico "uno uno" = "uno", et "duo plure" = "duo", nam "duo" continet idea de "plure", propositio fit:
"habemus uno ore et duo aure".

Ex.: "Omne homo est mortale, aliquo homo est nigro, multo homo est pauper, pauco homo est divite, plure homo est sapiens".

Propositione: "Romani eligebant duo consules"
fit "Populo Romano eligebat duo consule".

§ 4. *Conjugatione de verbo.*

> « Personae verborum possunt esse invariabiles, sufficit variari *ego, tu, ille,* etc. ». LEIBNIZ.

Lingua latino habet discurso directo, ut:
"Amicitia inter malos esse non potest"
et discurso indirecto:
"(Verum est) amicitiam inter malos esse non posse".

Si nos utimur semper de discurso indirecto, in verbo evanescit desinentia de persona, de modo, et saepe de tempore.

Sumimus ergo verbo inflexibile, per persona modo et tempore, sub forma magis simplice, qui es imperativo, activo et passivo. Regula es:

« *a*) Ad forma inflexibile "es, pote, vol, fi" responde infinito "esse, posse, velle, fieri".

« *b*) Ad forma inflexibile de alio verbo adde *-re*, et te habe infinito, ut es in vocabulario latino.

« *c*) Ad verbo activo adde *-re*, et te habe passivo.

« *d*) Nos transforma verbo deponente in activo ».

(Verbo "vol, dice, duce, face", et regula *d*) non es exacto latino classico).

Nos indica persona cum "me, te, nos, ...", modo cum "si, ut, quod, ...", tempore cum "heri, jam, in passato, nunc, cras, in futuro, vol, debe, ...".

Ex.: "Me scribe. — Vos lege. — Cras me i ad Roma. — Cras me, postquam veni ad Roma, scribe ad te. — Heri me lege dum te scribe et antequam Petro veni. — Si te narra, nos audi. — Ut te vale".

§ 5. — *Altero reductione de desinentia de verbo.*

Exsta aequalitate logico:

lauda-nte = qui lauda
lauda-ndo = dum lauda
lauda-to = qui aliquo lauda

(hoc es: " quem aliquis laudat ", juxta regula de §1)

lauda-turo = qui lauda in futuro
Petro lauda-re ab Paulo = Paulo lauda Petro.

Si in loco de primo membro de uno ex hic aequalitate nos scribe secundo, omne desinentia evanesce.

Sed aliquo desinentia, et non necessario, pote es utile, ut " -nte, -to ", desinentia " -vi, -bi " de passato et de futuro, et forma neolatino: " habe ama-to, es ama-to, . . . ".

§ 6. — *Vocabulario.*

Vocabulario latino commune suffice ut nos traduce hic lingua. Sed si plure auctore adopta " latino sine flexione ", tunc es utile publicatione de proprio vocabulario, qui:

1) Contine nomen et verbo, solo sub forma inflexibile.

2) Contine vocabulo internationale, ut " metro, dyne, ... ".

3) Elige suo voce ex toto latinitate, etiam ex latino populare. Igitur nos posse sume regula:

« Omne voce qui pertine ad duo lingua neolatino, p. ex. italo et franco, es latino ».

4) Simplifica derivatione et compositione de vocabulo.

De ultimo subiecto me hic breviter dice.

a) Substantivo diminutivo: " hortulo = parvo horto ", etc.

b) Substantivo abstracto ex adiectivo vale adiectivo. Ex. " bonitas = bono ", " altitudo = alto ".

c) Adiectivo qui deriva ab sustantivo vale genitivo: " aureo = de auro ", " vitulino=de vitulo ", " Romano = de Roma ", " chartaceo = ex charta ", " animoso = cum animo ".

d) Substantivo abstracto ex verbo vale verbo.

"Laudatio " = italico " il lodare " = anglo " to laud ", vel simpliciter " laud ".

" Vita est cogitatio " fi " vivere est cogitare ", in discurso indirecto (§ 4) " vivere esse cogitare ", post reductione ad radice: " vive es cogita ".

Ita "amor = ama", "gaudio = gaude", ...

e) "Lauda-tore = qui lauda", vel "qui sole lauda".

f) Adiectivo verbale: "erra-bundo = qui saepe erra", "tim-ido = qui sole time", "mord-ace = qui sole morde", "ama-bile = qui aliquo pote ama".

g) Adverbio extracto ex adiectivo vale adiectivo. Ita in latino classico "brevi, raro,..." es adiectivo et adverbio.

h) In modo simile ad "ne-sci, ne-fasto, n-ullo" nos forma: "ne-facile = difficile" "ne-digno = indigno" "ne-normale = abnormale" "ne-es = de-es", "ne-multo = pauco", etc.

i) Alio praefixo, p. ex. "ab", indica oppositione.

j) In modo simile ad "agricola = agro-colente" "homicidio = homo-caede", lice scribe: "auro-corona = corona de auro", "me-patre = meo patre", etc.

Lingua sinense habe omne hic simplificatione, et alio.

§ 7. — *Pronuntia de latino*

Pronuntia de latino non es uniforme in diverso populo. Forma meliore es antiquo:

ce, *ci* ut italo *che*, *chi*, franco *que*, *qui*, germano *ke*, *ki*.

ge, *gi* ut italo *ghe*, *ghi*, franco *gue*, *gui*, germano *ge*, *gi*.

ti ut italo *ti*, non *zi*.

y ut franco *u*, germano *ü*.

ae ut *e* aperto, franco *è*, germano *ä*.

oe ut franco *eu*, germano *ö* (hoc es conventione).

th ut anglo *th*, graeco moderno θ.

ph, sono producto quando nos suffla flamma. (Deriva ex graeco antiquo φ; graeco moderno pronuntia *f*).

ch, ut germano *ch*, etrusco *c*.

h, aspirato, ut germano.

rh, ut franco *r*.

qu sona ut *cu* in neolatino; hic duo syllaba es differente et in positione, et in pronuntiatione antiquo [2].

Omne alio litera ut in italo.

---

[2] Vide A. Meillet, *Introduction à l'étude comparative des langues indo-européennes*, Paris a. 1903 pag. 56.

HISTORIA

Quum plure populo es in reciproco contacto, per ratione de politica, scientia et commercio, semper se manifesta necessitate de inter-lingua.

Diverso populo, sub imperio Romano, adopta latino populare, qui es latino cum simplificatione de caso (§ 1).

Populo Saxone, in contacto cum Anglo, forma lingua anglo moderno, qui contine simplificatione de caso (§ 1), de genere (§ 2), et in parte simplificatione de persona et de modo (§ 4). Lingua anglo tende ad perdita de omne flexione et ad monosyllabismo.

Ita, in tempore historico, ori " Lingua franca " in porto de Mediterraneo, " Pidgin " in Sina, " Urdu " in India, etc.

Hodie omne homo de Europa et de America, qui habe plure relatione cum extero, clama lingua internationale. Nam suffice lingua nationale ad qui habe solo relatione nationale. Conoscentia de tres aut quatuor lingua principale suffice ut nos lege, in originale aut in versione omne libro jam celebre. Sed hodie Russo, Polacco, Rumeno, Japonico,... publica in suo lingua libro originale, et non solo libro scholastico.

Adoptio, ut inter-lingua, de lingua vive-nte, non es possibile, per causa de politica.

Plure homo propone latino classico. Vide: Prof. A. VALDARNINI de universitate de Bologna, *Necessità d'una lingua internazionale e lo studio del latino*, in " Primo congresso internazionale latino ", Roma a. 1903.

Hic congresso exorta:

« ut sermo latinus inter gentes universas communis habeatur,
« et adhibeatur ad humanitatis commercium fovendum, augendum,
« tenendum ».

Ibi congressista loque neolatino, ut italico, franco, provenzale, rumeno et castellano, raro latino classico.

Et periodico " Phoenix " in London, " Praeco latinus " in Philadelphia, " Vox urbis " in Roma sustine idem idea; sed primo mori in anno 1892, et secundo in 1902. Ergo adoptio de latino fi semper minus probabile.

Multo auctore, in vario tempo, propone lingua plus vel minus artificiale.

Vir doctissimo, L. COUTURAT professore in Universitate de Toulouse, in libro *La Logique de Leibniz*, Paris a. 1901 p. 608,

expone :

Ars magna de R. LULLE a. 1234-1315,

Ars magna sciendi de KIRCHER a. 1669,

Ars signorum de DALGARNO a. 1661,

Philosophical language de WILKINS a. 1668.

Postea Leibniz diffuse et profunde stude hic subjecto ; sed nihil publica. Suo studio mane sepulto in bibliotheca de Hannover, usque ad nostro die ; primo Dr Vacca in RdM., postea COUTURAT in libro citato detege et publica parte de hic manuscripto. Suo importantia magis pate, et denique L. COUTURAT publica « Opuscules et fragments inédits de Leibniz, Paris a. 1903, p. XVI-682, qui contine studio de Leibniz, summe praetioso per constructione de Vocabulario philosophico.

Libro, nunc edito, L. COUTURAT et L. LEAU *Histoire de la langue universelle*, Paris a. 1903 p. XXI+571, expone 56 projecto de lingua artificiale.

Me hic breve loque de magis noto.

SCHLEYER, parrocho, in anno 1879 publica « Volapük », qui es transformatione de lingua anglo, ut ipse dice.

Hic lingua regularisa declinatione de nomen, et conjugatione de verbo ; sed introduce nullo simplificatione rationale, qui Leibniz propone. Illo contine immenso numero de conventione.

Volapük sume in principio multo diffusione. In anno 1888 habe 283 club, et 25 periodico, in omne parte de terra. Plure conventione produce discordia inter sectatore, et post congresso de Paris, in anno 1889, hic lingua decade et mori.

ZAMENHOF, doctore in medicina, in anno 1887, publica «Esperanto », qui contine simplificatione de genere (§ 2), de persona (§ 4). Sed non contine simplicatione de caso (§ 1), de numero (§ 3) et de modo (§ 5). Esperanto reduce toto grammatica ad 16 regula, de qui nullo es necessario.

Et Esperanto contine magno numero de conventione, etsi minus quam Volapük, et in grammatica, et in vocabulario.

Esperanto habe hodie 9 periodico; jam plure sectatore propone simplificatione; ille seque via de Volapük.

Et notato-digno es " Langue Bleu " de L. BOLLACK. Ibi, ex numero de littera, nos vide si voce es vacuo, vel pleno, ut in sinense.

Nunc me loque de projecto cum pauco novo conventione.

" Lingua " de HENDERSON, a. 1888, es vocabulario latino, cum grammatica de typo Anglo.

D^r Daniel Rosa simplifica idea de Henderson, et publica « Le nov-latin » (3). Ille dice:

« Le nov-latin non requirer pro le sui adoption aliq congress.
« Omnes poter, cum les praecedént regulas, scriber statim ist lingua.
« ... Sic faciént ils vol valide cooperar ad le universal adoption de
« ist international lingua et simul ils vol poter star legé ab un mult
« major numer de doctes quam si ils haber scribé in quilibet alter
« vivént lingua ».

Ex hoc reulta quod Novlatin conserva pauco flexione (plurale in *-s*, 2 participio, ...), et es quam proximo ad " lingua rationale " de Leibniz et ad " latino sine flexione ".

Domino George J. Henderson, in periodico, "The lingua franca of the future", qui ille dirige, a. 1901, perfectiona suo projecto, et dice:

« Quare debe-nos non facere ex i Latine Lingue i Internationale Lingue?

« I Latine Lingue esse nimis difficile. Post decem annes de studere, pauce discipules pote, legere facile, vel scribere accurate, vel loquere aliquantulum i Latine Lingue ».

(*I* articulo, plurale in *-s*, desinentia, *-e*, . . .).

Societate, qui habe nomen " Akademi internasional de lingu universal " adopta vocabulo magis internationale, et post multo studio et discussione, in a. 1902, publica " Idiom neutral ".

« Idiom neutral es usabl no sole pro scribasion, ma et pro parlation ».

Ergo principio de maximo internationalitate duce ad vocabulo latino.

" The American Philosophical Society " in a. 1887, pro formatione de inter-lingua, propone abolitione de articulo (ut in latino et in russo), de flexione de adjectivo, de caso de nomen, de persona et modo de verbo, et, in modo dubitativo, abolitione de plurale de nomen, et tempo de verbo.

Quaestio de inter-lingua nihil habe hodie commune cum ideographia, qui nos adopta in « Formulario mathematico ».

Ideographia es synthese; cum auxilio de pauco idea primitivo, circa decem, ille compone idea complexo; ita *hodie* cum ideographia nos pote scribe toto mathematica, sed mathematica solo.

---

(3) *Bollettino dei Musei di Zoologia e Anatomia comparata della Regia Università di Torino*, a. 1890.

Lingua artificiale es analyse. Ille decompone idea de lingua commune in alio idea plus simplice.

Si in futuro analyse et synthese invicem conveni, ut duo exercito de minatore, qui labora tunnel ex duo extremitate, tunc « Lingua rationale » et « Characteristica universale » de Leibniz fore idem.

Vide quoque:

H. DIELS, *Ueber Leibniz und das Problem der Universalsprache*, Berlin Sitzungsberichte d. Akademie, a. 1899 p. 579.

Prof. G. BELLAVITIS, *Pensieri sopra una lingua universale e su alcuni argomenti analoghi*, Mem. dell'Ist. Veneto; vol. XI a. 1862, pag. 33-74.

Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale, qui porta firma de numeroso scientiato de plure universitate, academia, repraesentante de societate philosophico, de commercio et de sport. Ipse delegatione declara:

« Lingua auxiliaria internationale

« 1. posse servi ad relatione de vita sociale, de commercio, et de scientia et philosophia.

« 2. Omne homo, qui habe instructione elementare medio, facile disce hic lingua.

« 3. Hic lingua es proprio ad nullo natione ».

Prof. L. COUTURAT explica hic idea in opusculo: *Pour la langue internationale* a. 1901. Periodico *Revue des questions scientifiques*, Bruxelles a. 1902, t. 1, p. 547-586 reproduce scripto de COUTURAT, cum observatione de P. P. PEETERS. COUTURAT responde in t. 2, pag. 213-230. Nullo objectione de PEETERS vale per " Latino sine flexione ".

CONCLUSIONE

Articulo, qui praecede, proba quod flexio de nomen et de verbo non es necessario.

" Se, invece di dizionario latino, noi cercare ogni parola in dizionario italiano, noi scrivere in italiano senza flessione ".

Articulo qui seque (*), contine versione litterale de plure propositione Germano et Anglo. Ille proba, quod suppressio de omne flexio non redde discurso magis longo.

(*) Si riferisce al lavoro n. 127, del 1903, (*Principio de permanentia*) contenuto nel vol. III di queste « Opere scelte ». *U. C.*

(229). ALGEBRA DE GRAMMATICA

(Schola et Vita, vol. V, Milano, 1930, pp. 323-336)

DERIVATIONE

Questo lavoro, che è uno degli ultimi scritti di G. PEANO, contiene una nuova rielaborazione del "calcolo grammaticale", introdotto da G. PEANO nel suo primo studio di filologia dal punto di vista logico matematico (lavoro n. 130, del 1904).

Cfr. l'annotazione preliminare al lavoro n. 155 (del 1912). *U. C.*

1. Nos habe æqualitates:

arde = *es ardente* = *habe ardore*;

ardente = *que arde* = *cum ardore*.

Grammaticos, in generale, dice: *arde* es verbo, *ardente* adjectivo, *ardore* nomine. Me scribe V, A, N in loco de « verbo, adjectivo, nomine », et signo + inter duo elemento. Resulta:

$$\mathrm{V} = es + \mathrm{A} = habe + \mathrm{N}\,;\ \mathrm{A} = que + \mathrm{V} = cum + \mathrm{N}\,.$$

Si nos adopta signo — pro indica operatione inverso de +, resulta:

$$es = \mathrm{V} - \mathrm{A}\,;\ habe = \mathrm{V} - \mathrm{N}\,;\ que = \mathrm{A} - \mathrm{V}\,;\ cum = \mathrm{A} - \mathrm{N}\,;$$

« *es* produce verbo ex adjectivo »; « *habe* transforma nomine in verbo », etc.

Nos decompone:

ardente = *arde* + *-nte*, *ardore* = *arde* + *-ore*

« vocabulo *ardente* consta de thema *arde* plus suffixo *-nte*, *ardore* deriva de *arde* cum suffixo *-ore*; vocale finale de *arde* evanesce ante *-ore*.

Resulta A = V + *-nte*, N = V + *-ore*

unde

$$\textit{-nte} = \mathrm{A} - \mathrm{V} = que,\ \ \textit{-ore} = \mathrm{N} - \mathrm{V}\,,$$

$$cum = \mathrm{A} - \mathrm{N} = (\mathrm{A} - \mathrm{V}) + (\mathrm{V} - \mathrm{N}) = que\ habe.$$

Si nos indica per 0 elemento de valore nullo, resulta:

$0 = (V - A) + (A - V) =$ *es que* $=$ *es -nte*,

$0 = (V - N) + (N - V) =$ *habe -ore.*

Symbolos præcedente constitue calculo de Grammatica simile ad Algebra de Mathematica.

Nos stude elementos de grammatica cum valore de præcedentes, et determina gradu de internationalitate de illos.

2. Grammaticos habe vario nomenclatura: *arde* es thema, aut radice, aut radicale; vide explicationes in meo opusculo « Interlingua » de 1927. In Latino, *ardente* es participio præsente de *arde*. Idem in Italiano que habe voces *ardere ardente ardore*, Hispano *arder ardiente ardor*, Portuguez *arder ardente ardor*. Sed lingua Franco habe solo *ardent ardeur*; verbo es *brûler*. Et Anglo habe adjectivo *ardent*, nomine *ardor*; verbo es *burn*, et suo participio præsente es *burning*. In generale, vocabulos derivato es plus internationale quam vocabulos simplice.

Pro recognosce vocabulos internationale, suffice de consulta vocabularios de vario lingua. Pro omne lingua existe vocabularios minimo de 2000 voce populare, vocabularios medio de 30.000 voce; vocabulario Anglo de Webster, editione 1911, contine 400.000 voce. Meo « Vocabulario Commune » editiones de 1909 et 1915 es tracto ex vocabularios medio. Circa 1500 vocabulo es « Latino usque Russo », id es commune ad Italo, Hispano, Portuguez, Franco, Anglo, Teutico et Russo. Et 14.000 es « Latino-Anglo », et sæpe commune ad plure alio lingua.

3. $V - A =$ ***es***. Isto vocabulo latino vale imperativo et thema de verbo persona tertio ***es-t***, infinitivo ***es-se***. Vive in I. ***è essere***, F. ***est être***, H. ***es ser***, P. ***he ser***. Deriva ex Europæo antiquo, unde Sanscrito ***asti***, Græco ***esti***, Russo ***jesti***, Polono ***jest***. Teutico per metaphonia dice ***ist***, Anglo ***is***.

4. $A - V =$ ***que*** $=$ ***-nte***.

Vocabulo ***que*** es thema de accusativo L. ***quem***, nominativo ***qui quod***, ablativo ***quo***. Vive in F. ***que***, I. ***che***, H. ***que quien***, P. ***que quem***.

Habe derivatos « quis quid ubi quibus quomodo quando », celebre regula de rhetorica. Derivatos Anglo: ***quality quantity quote***.

Illo habe origine commune (linguistas dice) cum A. ***who what***, T. ***wer was***. Et cum Græco ***pos***, unde ***posologia*** = « scientia de quantitates pro pharmacos ». In Russo es ***ko c'e***, Polono ***ktoro co***, Sanscrito ***kas ka kad***.

5. Vocabulos Latino usque Russo cum suffixo *-nte* = = A — V : *adjutante, agente, appellante, assistente, coefficiente, concurrente, continente, correspondente, dissidente, emigrante, exponente, fabricante, intendente, patente, patiente, præsidente, quadrante, reagente, recipiente, regente, secante, studente, tangente, transcendente, transparente, vacante, variante.*

Si nos scribe *es* = V — A ante adjectivos præcedente, resulta verbos : *adjuta, age, appella, assiste, coeffice, concurre, contine, corresponde, disside, emigra, expone, fabrica, intende, pate, pati, præside, quadra, reage, recipe, rege, seca, stude, tange, transcende, transpare, vaca, varia.*

Russo habe solo verbos *concurre, emigra, fabrica.*

Viceversa, si ante verbos nos pone *que* = A — V , resulta adjectivos præcedente.

Suffixo *-nte* sume forma *-ente* post *i* : *pati patiente*, et in pauco verbo *suffice sufficiente*, Anglo *suffice sufficient.*

L. *-nte* habe origine commune cum Græco *-ont* de *horizonte* = = limitante, *ozon* = odorante (in chemia), *ion* = que i (in electricitate).

Latino *fer-ente* es identico ad Teutico (*ge*)*bär-end*, græco *pher-ont* ; Sanscrito *bhar-anta* ; suffixo de Anglo *bear-ing* es complicato.

Æqualitates que nos considera, in plure casu es solo approximato. Per exemplo *studente* = « que stude », sed hodie *studente* = « inscripto in universitate ».

6. Vocabulos Latino usque Russo, cum suffixo *-tore* = = A — V :

Es : *actore, auctore, auditore, censore, commentatore, compositore, compressore, conductore, conservatore, correctore, curatore, dictatore, directore, doctore, factore, inquisitore, lectore, liquidatore, monitore, operatore, oratore, procuratore, protectore, rectore, regulatore, revisore, sculptore, sectore, speculatore, ventilatore.*

= *age, auge, audi, cense, commenta, compone, comprime, conduce, conserva, corrige, cura, dicta, dirige, doce, fac, inquire, lege, liquida, mone, opera, ora, procura, protege, rege, regula, revide, sculpe, seca, specula, ventila.*

In modo plus præciso : *auditore* = qui (homo que) audi ; *ventilatore* = quod (re que) ventila.

Suffixos *-tore, -tivo, -to, -tione, -tura* funde se cum thema de verbo, sicut *lectore* ex *lege, compositore* ex *compone*. Vide infra, n. 23.

Græco *rhetore* = *oratore.*

7. Vocabulos Latino usque Russo, cum suffixo *-tivo* = = A — V:

Es: *activo, administrativo, conservativo, passivo, positivo, reactivo, recitativo*
= *age, administra, conserva, pati, pone, reage, recita.*

Alio suffixo = A — V, in Latino-Anglo:

Es: *audace, capace, fallace, fugace, loquace, mordace, rapace, tenace, vorace*
= *aude, cape, falle, fuge, loque, morde, rape, tene, vora.*

Es: *acido, arido, candido, fervido, fluido, liquido, splendido, tepido, valido*
= *ace, are, cande, ferve, flue, lique, splende, tepe, vale.*

Es: *credulo, pendulo, tremulo* = *crede, pende, treme*;
es *stabile* = *sta*; es *fertile, volatile* = *fer, vola*;
es *vagabundo* = *vaga*; es *cauto* = *cave*; es *caduco* = *cade*;
carnivor-o = *que vora carne*; *centrifug-o* = *que fuge ab centro*; *conscio* = *que cum sci.*

Et in Græco *anthropo-phag-o* = que vora homine; *phos-phoro* = luce-ferente; *tele-phon-o* = longe sonante.

8. 0 = (A — V) + (V — A).

A — V, sub forma *-nte*, in grammatica latino es « participio præsente »; V — A = *es*; ergo participio præsente de verbo *es* habe valore nullo, et non existe in Latino classico. Existe in Græco sub forma *ont-*, unde *ontologia*; Quintiliano, anno 100, verte illo in *ens entis*, ablativo *ente*, I. *ente*, F. *être*; in Anglo es *be-ing* = *es-ente.*

Exemplo Anglo: « man is a rational being » = « homine es uno rationale ente » = « homine es rationale ».

« Me es præsente, te es absente » = « me es præ-es-ente, te es ab-es-ente » = « me es præ, te es ab ».

Grammaticos dice « *absente* es adjectivo, *ab* es præpositione »; ergo adjectivo coincide cum præpositione.

9. V — N = *habe.* Isto verbo, infinitivo *habere*, vive in I. *avere*, F. *avoir*, H. *haber*, P. *haver.* Vale A. *have*, T. *haben*; origine commune es dubio.

10. A — N = *cum*, I. *con*, H. *con*, P. *com*, habe derivatos usque Russo:

coefficiente collegio combina commenta commercio commissario compilatore compositione compressore conclave concordatu concurre conden-

satore conductore conferentia confœderatione congressu conserva consilio continente contributione convulsione cooperatione coordinata correspondente cosinu etc.

11. Plure suffixo vale A — N, in vocabulos Latino-Anglo: *aquoso, famoso, furioso, gratioso, nebuloso = cum aqua, fama, furia, gratia*; *cornuto = cum cornu, justo = cum jus*; *fraudulento, pulverulento, purulento = cum fraude, pulvere, pus.*

In «*rationale = cum ratione*» suffixo *-ale*, = A — N; sed in: «littera finale = littera in fine; forma ovale = forma de ovo; linea verticale = linea ab vertice», suffixo *-ale,* vale nomine plus, vario præpositione; in «neutrale = neutro», suffixo vale 0.

12. N — V = suffixo de (*ard*)*ore.* Alio exemplo Latino-Anglo:

habe *dolore, fervore, languore, sapore, splendore, tremore = dole, ferve, langue, sape, splende, treme*;

habe *origine, gaudio, rabie, opinione, ambitione, statu, vita = ori, gaude, rabe, opina, ambi, sta, vive.*

13. Infinitivo latino *amare audire* es nomine tracto ex verbo, et vale N — V. Ita dice grammatica superiore. Per exemplo: HENRY, *Grammaire comparée de l'anglais et de l'allemand*, 1898: «Dans toutes les langues de la famille indo-européenne, l'infinitif n'est pas un mode du verbe, mais une véritable formation nominale, un nom d'action». Versione: «In omne lingua de familia indo-europæo, infinitivo non es modo de verbo, sed vero formatione nominale, nomine de actione».

In linguas neolatino, infinitivo habe sæpe articulo: F. «le pouvoir, le savoir», I. «il potere, il sapere = la potenza, la scienza».

Græco adopta articulo neutro *to*: «to graphein» = L. «scribere».

In «Vocabulario commune», me adopta abreviatione *to* = = N — V: «ardore = to arde», «gaudio = to gaude»; lege: «*ardore* es nomine abstracto de *arde*».

Græco *to* es articulo et pronomine demonstrativo. Trans Indo-Europæo vive in L. *isto*, P. *isto*, H. *esto*, I. *questo*, F. *cet.*

In A. es *the*, T. *der die das.*

In R. es *to*, Sanscrito *ta*, solo demonstrativo.

Sed publico non intellige *to*, sine explicatione.

14. Nos pote elimina N — V, infinitivo et articulo *to* in vario modo; vide opusculo « Interlingua ». Exemplo:

L. « Errare humanum est » = L. « Hominis est errare » = « Homine erra ».

« Prudentis est mutare consilium » = « Homine prudente muta consilio ».

« Fortuna confidere stultum est » = « Stulto fide in fortuna ».

« Ars est celare artem » = « Arte cela arte ».

« Beneficium accipere libertatem vendere est » = « Qui accipe beneficio vende libertate ».

« Vivere est cogitare » = « Qui vive, cogita ».

I. « Volere è potere » = F. « Vouloir c'est pouvoir » = « Qui vol pote ».

Non es difficile de elimina N — V, infinitivo et articulo; sed auctores de plure lingua judica commodo aliquo elemento.

Volapük 1879, lingua in parte artificiale, adopta nomine *fug* = L. *fuga*, infinitivo *fug-ön* = L. *fuge-re*, sine articulo.

Esperanto 1887 habe nomine *forkur-o*, infinitivo *forkur-i*, et articulo *la*.

Ido 1908 habe nomine *fug-o*, infinitivo *fug-ar*, et articulo *la*.

Occidental, editione 1928, habe nomine *fui-tion*, infinitivo *fui-r*, et articulo *li*.

Novial 1928 seque Anglo et non habe suffixo de infinitivo.

15. N — A = « nomine abstracto ex adjectivo ». Ex adjectivo *libero* resulta abstracto *libertate*, que satisfac conditione:

« habe libertate = es libero ».

Nunc *libertate* = *libero* + suffixo *-tate*; resulta

habe + *-tate* = *es*; V — N + *-tate* = V — A,

et in fine:

-tate = N — A.

Vocabulos Latino-Anglo cum suffixo *-tate*:

Habe: *aciditate, æqualitate, amabilitate, bonitate, dignitate, felicitate, fidelitate, firmitate, fragilitate, fraternitate, generalitate, gravitate, libertate, neutralitate, notorietate, pietate, qualitate, totalitate, vanitate, varietate*

= es: *acido, æquale æquo, amabile, bono, digno, felice, fidele fido, firmo, fragile, fraterno, generale, grave, libero, neutrale neutro, notorio noto, pio, quale, totale toto, vano, vario.*

Vocabulos *generalitate, neutralitate, auctoritate, facultate, universitate* es usque Russo.

Pro orthographia: L. *universitate,* I. *-ità,* F. *-ité,* H. *-idad,* P. *-idade,* A. *-ity,* T. *-ität,* R. *-itet.*

16. Alio suffixo N — A, in Latino-Anglo:
Habe: *altitudine, amplitudine, gratitudine, similitudine, solitudine* = es: *alto, amplo, grato, simile, solo.*
Habe: *avaritia, concordia, inertia, ignorantia, cautela* = es: *avaro, concorde, inerte, ignorante, cauto.*

N — A = (N — V) + (V — A) = (infinitivo) plus (es) = L. *esse*: *libertate = esse libero, concordia = esse concorde.*

Sed publico non intellige *esse* = N — A, sine explicatione.

Nos pote supprime N — A:
L. « Avaritia est indigentia » = « Avaro es indigente »;
« Arrogantia est stultitia » = « Arrogante es stulto »;
« Cæca invidia est » = « Qui invide es cæco »;
« Inest clementia forti » = « Homine forte es clemente ».
« Concordia parvæ res crescunt, discordia maximæ dilabuntur » = « Res parvo cresce inter concordes, res maximo labe inter discordes ».

17. Plure suffixo es composito:

Habe acid-itate = es ac-ido = ace;

Habe distant-ia, correspondent-ia, different-ia, scient-ia, vacant-ia = es dista-nte, corresponde-nte, differ-ente, sci-ente, vaca-nte = dista, corresponde, differ, sci, vaca.

Habe capac-itate, rapac-itate = es cap-ace, rap-ace = cape, rape.

Habe rational-itate = es ration-ale = habe ra-tione = ra (reor ratus).

Habe victor-ia = es vic-tore = vince;

habe cupid-ine, ignorant-ia, caut-ela = es cup-ido, ignora-nte, cau-to = cupe, ignora, cave.

F. audacieux, A. audacious = aude -ace -ia -oso = cum audacia = audace = que aude; amor-oso = cum am-ore = que ama.

Just-itia = esse jus-to = esse cum jus = jus.

Gratios-itate = esse grat-ioso = esse cum gratia = gratia.

I = inversione, passivo.

18. Existe propositiones cum uno solo variabile. Exemplo « x curre » es vero, si in loco de x nos pone « cane, equo » etc. Parte que seque x in propositione de isto forma, es « verbo neutro » de grammaticos.

Existe propositiones cum duo variabile. Exemplo « x ama y » es vero si pro x nos lege matre, et pro y filio, etc.

Nos pote resolve relatione « xRy » pro y, et resulta novo relatione, que nos indica per RI aut R + I, lege « R inverso ».

Grammaticos dice R « verbo transitivo », et RI es « passivo de R ».

Relationes R et RI sæpe es indicato per vocabulos differente:
Cælo es super Terra = Terra es sub cælo
Homero præcede Virgilio = Virgilio seque Homero;
Dario es patre de Cyro = Cyro es filio de Dario;
Discipulo disce ab magistro = Magistro doce ad discipulo;
x es causa de y = y es effectu de x;
5 es majore de 2 = 2 es minore de 5;
12 es multiplo de 3 = 3 es divisore de 12;
6 es duplo de 3 = 3 es dimidio de 6.

Mathematicos dice Ry functione de y; Aristotele divide ideas (aut vocabulos græco) in 10 categoria; « functione » es in categoria 4, et da exemplos « duplo, majore ».

Resulta I + I = 0, relatione inverso de inverso vale relatione primitivo.

19. Latino indica passivo per desinentia; ad activo *amo amas*, imperativo *ama*, responde passivo *amor amaris*, imperativo *amare*. Isto forma es mortuo.

Linguas moderno indica passivo per « *es* + participio passivo »: Matre ama filio = Filio es amato ab matre.

Ergo: *es amato* = *ama* + I; *es* + suffixo *-to* = I;
V — A + *-to* = I, et in fine:
-to = A — V + I.

Nos pone: *amato* = *quem ama*,
ubi vocabulo latino *quem* es accusativo de *que*; ergo
A — V + I = *quem* = *-to*.

V — A + I, opposito ad præcedente, pote es expresso per *redde*.

Vocabulos Latino usque Russo, cum suffixo *-to* $= A - V + I$:

absoluto adjuncto advocato assignato attributo compromisso delegato deputato duplicato extracto facto instituto legato manuscripto minuto ordinato præfecto privato producto projecto quadrato rescripto secreto statuto subjecto sublimato.

Si ante istos adjectivo nos pone *redde* $= V - A + I$, resulta verbos:

absolve adjunge advoca assigna attribue compromitte delega deputa duplica extrahe fac institue lega manu-scribe minue ordina præ-fac priva produce projice quadra rescribe secerne statue subjice sublima.

Viceversa, si ante isto verbos nos scribe *quem*, nos obtine valore de participio passivo scripto supra.

Æquationes es semper solo approximato.

Suffixo *-to* es Indo-Europæo; in Græco *anti-do-to* = *dato contra*, *an-ec-do-to* = in-e-di-to. In Anglo *unit-ed*, *add-ed*, T. *gehab-t*.

20. Suffixos cum valore $V - A + I$ = *redde*:

Brevia, celebra, illustra, integra, libera, sana = redde *breve, celebre, illustre, integro, libero, sano.*

Amplifica, clarifica, falsifica, gratifica, notifica, rectifica, unifica, vivifica = redde *amplo, claro, falso, grato, noto, recto, uno, vivo.*

Civiliza = *redde civile*; *mitiga* = *redde mite.*

Celebrato = *celebre* + *-a* + *-to* = *celebre* $+ (V - A + I) + (A - V + I)$ = *celebre*;

Integrato = *integro*; *falsificato* = *falso*; *civilizato* = *civile.*

Plure æquivalentia es solo approximato:

liberato = *libero* hodie, non in præterito.

« *Capta* = *redde capto* = *redde quem cape* = *cape* ». Ergo suffixo *-ta* $= (V - A + I) + (A - V + I) = 0$:

accepta = *accipe*; *contracta* = *contrahe*; *disserta* = *dissere*; *occulta* = *occule*, *tracta* = *trahe.*

Suffixos *-to* et *-ta* in Anglo coincide in *-te*; Anglo *create* vale Latino *crea* et *creato.*

21. Ex æqualitate: « habe approbatione = es approbato », si nos substitue *habe* $= V - N$, *es* $= V - A$, *-to* $= A - V + I$, resulta:

$$\textit{-tione} = N - V + I.$$

Ex: *da approbatione*, aut *fac approbatione* = *approba*, resulta

$$\textit{da}, \textit{fac} = V - N + I,$$

opposito de *-tione.*

Vocabulos usque Russo cum suffixo *-tione*: — *aberratione actione administratione amputatione approbatione associatione auscultatione calcinatione citatione classificatione collectione compilatione compositione concessione confirmatione confœderatione conscriptione constitutione constructione contrafactione contusione cooperatione declamatione declaratione decoratione deductione definitione demonstratione directione dispositione dissertatione divisione evolutione excursione expeditione expressione executione formatione fortificatione functione illuminatione illusione illustratione indicatione interpolatione introductione lectione liquidatione missione modulatione mutatione numeratione obligatione operatione oppositione petitione positione præcessione proclamatione progressione projectione proscriptione provisione publicatione reactione redactione reformatione refractione relatione repetitione reputatione requisitione resolutione revisione revolutione sectione sequestratione speculatione subordinatione taxatione traditione triangulatione variatione.*

Si ante isto nomines nos pone *fac* aut *da*, resulta verbos: *aberra age administra amputa approba associa ausculta calcina cita classifica collige compila compone concede confirma confœdera conscribe constitue construe contrafac contunde coopera declama declara decora deduce defini demonstra dirige dispone disserta divide evolve excurre expedi exprime exeque forma fortifica funge illumina illude illustra indica interpola introduce lege liquida mitte modula muta numera obliga opera oppone pete pone præcede proclama progredi projice proscribe provide publica reage redige reforma refrange refer repete reputa require resolve revide revolve seca sequestra specula subordina taxa trade triangula varia.*

Et si ante nomines cum *-tione* = N — V + I, nos pone *cum* = A — N, nos obtine in generale participio in *-to*:
cum *amputatione approbatione confirmatione contrafactione contusione... = amputato approbato confirmato contrafacto contuso...*

22. Alio suffixo cum valore N — A + I:

Da: *alimento ligamento medicamento nutrimento ornamento tegumento = ale liga medica nutri orna tege.*

Fac: *pictura sculptura punctura mixtura = pinge sculpe punge misce.*

Suffixo *-a* vale V — N + I in: *laud-a = da laude, honor-a = da honore; aliment-a = da alimento = ale.*

23. In nomines usque Russo: *concordatu congressu contractu processu progressu transitu,* si nos præpone *fac,* resulta verbos: *concorda congredi contrahe procede progredi transi.*

Ergo, *-tu* = N — V + I.

Prisciano, grammatico latino, circa anno 550, voca « supino » de verbo, derivato in *-tum -tu*. Vocabulario latino ad usu de schola, pro omne verbo da formas « amo amas amavi amatum amare », et *amatum* es supino. Ex thema de supino, si nos muta *um* in *-o -ore -ivo -ione -ura*, resulta derivatos ex verbo cum suffixos *-to -tore -tivo -tione -tura*; illos vive numeroso in linguas moderno.

In majoritate de casu, suffixo es addito sine modificatione. Exemplo *cura-tore audi-tore, n.* 6, *administra-tivo, n.* 7, *duplica-to, n.* 19, *amputa-tione, n.* 21, *transi-tu, n.* 23.

Sed numeroso verbo, dicto irregulare, funde suffixo cum thema de verbo, secundo regulas complicato, exposito in omne grammatica latino ad usu de schola. Verbos irregulare constitue magno difficultate in studio de linguas de Europa. Ecce aliquo exemplo:

L. seca secto, Anglo secant sector;
adde addito, A. add addition;
age acto, A. agent actor;
sorbe sorpto, A. absorbent absorption;
vehe vecto, A. vehicle vector;
cade casu, A. cadence casual;
ride risu, A. deride derision;
terge terso, A. abstergent abstersion;
verte verso, A. revert reverse;
adhære adhæso, A. adherent adhesion;
curre cursu, A. current cursive;
stringe stricto, A. stringent strict;
tange tacto, A. tangent taction; — Etc. etc.

24. Grammatica es formale. Proprietate de uno vocabulo es *reale*, de re, si es proprietate de idea que vocabulo repræsenta; proprietate es *formale*, si es relativo ad forma de vocabulo. Exemplo:

1. Cane habe quatuor pede,
2. Cane habe quatuor littera,
1. Sole da luce,
2. Sole es de genere masculino,

proprietates 1 es reale, et es vero in omne lingua; proprietates 2 es formale; per exemplo, *cane* vale Anglo *dog*, cum solo 3 littera; et *sole*, masculino in Latino, es feminino in T. *Sonne*, et neutro in A. *sun*.

Exemplos ex mathematica:

« 2/3 es fractione minore de unitate » exprime proprietate reale de 2/3.

« 2/3 es fractione irreductibile » indica proprietate formale, et non es vero, si in loco de 2/3 nos pone suo æquale 4/6.

In generale, mathematicos tracta de proprietates reale; sed aliquo libro abunda de vocabulos formales « monomio, binomio, termino, factore, numeratore...» que pote es suppresso, et scientia remane.

Nunc nos stude si propositiones:

« *sole* es nomine, *albo* es adjectivo, *curre* es verbo » exprime proprietate reale aut formale de vocabulos *sole, albo, curre.*

Homero et Horatio redivivo non pote responde ad isto quæstione, nam illos ignora vocabulos « nomine, adjectivo, verbo » et vive felice.

Primo libro græco de grammatica es de Dionysio Thrace, anno 150 a. Ch.

Donato, anno 350 p. Ch., scribe « Ars grammatica », libro uso in omne schola usque ad tempore moderno. Illo dice:

« Partes orationis sunt octo. Nomen est pars orationis cum casu, corpus aut rem significans. Verbum est pars orationis cum tempore et persona ».

In breve « nomine habe casu de declinatione, verbo habe conjugatione que indica tempore et persona ». Ergo lingua sine flexione non habe partes de oratione, nomine et verbo.

Ullo grammatico dice: « verbo exprime statu aut actione », sed *statu* et *actione* es nomine; ergo verbo exprime nomine.

Max Müller, *The science of thought*, London 1887, dice quod categorias grammaticale, que deriva ab Aristotele, es relativo ad Græco, et non pote es applicato ad linguas Semitico et Sinense, toto differente.

M. Bréal, *Essai de sémantique*, Paris 1889, dice « Il y a des langues qui ne distinguent pas les catégories », et affirmatione simile es in omne grammatica superiore.

In Anglo, vocabulo *sun* es nomine et verbo, et significa « sole, pone ad sole »; *white* es adjectivo, verbo, nomine, et significa « albo, redde albo, re albo»; *run* vale « curre, cursu, fac curre ». Ab contextu resulta si in versione ab Anglo ad Latino, nos debe adopta nomine, adjectivo aut verbo.

25. *Conclusione.* In paginas præcedente me classifica suffixos que transforma nomine, adjectivo, verbo. Æqualitates considerato, quale in n. 1:

arde = es ardente, ardente = que arde

exprime vocabulo simplice per composito et viceversa. Vocabulos composito es plus internationale; radices simplice redde lingua plus breve et minus verboso.

Æqualitates que nos considera, es sæpe solo approximato (n. 5). Per exemplo, nos pote decompone vocabulo mathematico *differentiale* in *dis- fer -ente -ia -ale*; et ab valore de isto elementos deriva parte sed non toto valore de *differentiale.*

Calculo super V, N, A, vale, in generale, pro linguas de Europa, sed es solo formale; non opera super ideas, et non vale in omne lingua.

Nullo elemento de derivatione es necessario, nam derivato sæpe es internationale; in omne casu pote es eliminato per æquationes præcedente.

Experientia proba quod per usu de vocabulos internationale, et grammatica simplice aut nullo, numeroso auctore scribe in lingua que homine culto intellige sine studio, aut quasi.

Et si scriptore adopta orthographia latino, conforme ad consilio de nostro Academia, lectore, in casu dubio pote consulta vocabulario latino ad usu de schola. Vocabulario internationale es in generale scientifico; ergo lectore, pro interpreta sine studio, debe es homine culto, que cognosce vocabulos scientifico de suo lingua, et non solo vocabulos populare. Et si lectore es minus docto, studio de Interlingua redde illo plus docto.

FINE del Vol. II